EXTRAIT DE *Mathesis*, Tome LXIV, 1955.

UNE CONGRUENCE LINÉAIRE DE CONIQUES,

par LUCIEN GODEAUX,
Professeur à l'Université de Liège.

MONTESANO a montré que les coniques qui s'appuient en six points sur une courbe gauche du huitième ordre et de genre trois, possédant deux points triples, forment une congruence linéaire, c'est-à-dire que par un point de l'espace il passe en général une et une seule conique de cette congruence. Nous nous proposons d'établir que l'on peut supposer que les points triples de la courbe du huitième ordre sont infiniment voisins.

1. Rappelons tout d'abord la construction de MONTESANO [1].

[1] *Su i varii tipi di congruenze lineari di coniche* (REND. ACCAD. DI NAPOLI, 1895, pp. 15-18 de la note II).

Considérons un faisceau $|F|$ de surfaces cubiques ayant deux points doubles O_3, O_4. La base de ce faisceau est formée de la droite O_3O_4 et d'une courbe du huitième ordre C_8 ayant des points triples en O_3, O_4. Une surface F de $|F|$ a un plan tangent fixe le long de la droite O_3O_4 ; ce plan coupe cette surface suivant une seconde droite r, s'appuyant en deux points sur la courbe C_8. Les plans passant par r découpent sur F des coniques γ en nombre ∞^1, s'appuyant en six points sur la courbe C_8. Lorsque la surface F décrit le faisceau $|F|$, on obtient ∞^2 coniques, c'est-à-dire une congruence de coniques.

Par un point P de l'espace, n'appartenant ni à O_3O_4 ni à C_8, il passe une seule surface du faisceau $|F|$ et, sur cette surface, une seule conique γ. La congruence est donc bien linéaire.

2. Le point essentiel dans la construction de MONTESANO est le fait qu'une surface cubique possédant deux points doubles a un plan tangent fixe le long de la droite déterminée par ces points. Or, cette propriété appartient aussi à la surface cubique possédant un point double biplanaire et contenant la droite d'intersection des plans tangents en point double [1]. On en déduit la construction d'une congruence linéaire de coniques analogue à celle de MONTESANO.

Considérons un faisceau $|F|$ de surfaces cubiques, passant par une droite O_3O_4 et ayant en O_4 un point double biplanaire, les plans tangents à une surface du faisceau en ce point passant par la droite O_3O_4. La base de ce faisceau est formée de la droite O_3O_4 et d'une courbe du huitième ordre C'_8.

Une surface du faisceau $|F|$ a un plan tangent fixe le long de la droite O_3O_4 ; ce plan coupe encore la surface suivant une seconde droite r bisécante de la courbe C'_8. Les plans passant par r découpent sur la surface ∞^1 coniques γ s'appuyant en six points sur C'_8. Lorsque la surface varie dans le faisceau $|F|$, on obtient une congruence linéaire de coniques γ.

Pour déterminer le faisceau $|F|$, nous pouvons prendre deux surfaces

$$F_1 \equiv x_4\alpha_1\alpha'_1 + x_3^2\varphi_1(x_1, x_2) + x_3\varphi_2(x_1, x_2) + \varphi_3(x_1, x_2) = 0,$$

$$F_2 \equiv x_4\beta_1\beta'_1 + x_3^2\psi_1(x_1, x_2) + x_3\psi_2(x_1, x_2) + \psi_3(x_1, x_2) = 0,$$

où α_1, α'_1, β_1, β'_1, φ_1, ..., ψ_3 sont des formes algébriques en x_1, x_2 dont le degré est indiqué par l'indice.

---

(1) Voir notre ouvrage : *Introduction à la géométrie supérieure* (Liège, Thone et Paris, Masson, 1946, pp. 132-134) et notre note *Sur la surface cubique touchant un plan le long d'une droite* (M, 1954, pp. 326-327).

Les plans tangents à une surface $F_1 + \lambda F_2 = 0$ du faisceau en O_4 sont donnés par

$$\alpha_1\alpha_1' + \lambda\beta_1\beta_1' = 0.$$

Dans le faisceau de plans d'axe O_3O_4, ils forment une involution du second ordre ayant deux plans doubles. Nous prendrons ces plans doubles pour faces $x_1 = 0$, $x_2 = 0$ du tétraèdre de référence, de sorte que le faisceau $|F|$ peut être défini par les surfaces

$$F_1 \equiv x_4x_1^2 + x_3^2\varphi_1 + x_3\varphi_2 + \varphi_3 = 0,$$
$$F_2 \equiv x_4x_2^2 + x_3^2\psi_1 + x_3\psi_2 + \psi_3 = 0.$$

Si nous projetons la courbe C_8' du point O_4 sur le plan $x_4 = 0$, nous obtenons la quintique

$$\begin{vmatrix} x_1^2 & x_3^2\varphi_1 + x_3\varphi_2 + \varphi_3 \\ x_2^2 & x_3^2\psi_1 + x_3\psi_2 + \psi_3 \end{vmatrix} = 0,$$

qui possède un point triple en O_3 et qui est par suite de genre trois.

On en conclut que la courbe C'_8 possède un point triple en O_4 et qu'elle est de genre trois.

3. Pour analyser la singularité de la courbe C_8' en O_4, nous utiliserons une transformation quadratique.

Passons aux coordonnées non homogènes en posant $x_1 = x$, $x_2 = y$, $x_3 = z$, $x_4 = 1$. Effectuons ensuite sur les surfaces F_1, F_2 la transformation quadratique

$$x = x'z', \qquad y = y'z', \qquad z = z',$$

qui fait correspondre au point infiniment voisin de $O = O_4$ situé sur la droite $x = y = 0$, le point $O'(x' = y' = z' = 0)$ ([1]).

Aux surfaces F_1, F_2 correspondent respectivement les surfaces (pour plus de simplicité, nous écrivons x, y, z au lieu de x', y', z').

$$x^2 + z(\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3) = 0, \; y^2 + z(\psi_1 + \psi_2 + \psi_3) = 0,$$

où $\varphi_1, \ldots, \psi_3$ sont encore des formes en x, y.

Ces deux surfaces passent par la droite $x = y = 0$. Elles ont des points doubles coniques en O', les cônes tangents

$$x^2 + 2\varphi_1 = 0, \quad y^2 + 2\psi_1 = 0$$

([1]) Voir L. Godeaux, *Géométrie algébrique*, tome Ier (Liège, Sciences et Lettres, et Paris, Masson, 1948). Voir pp. 75-76.

étant distincts et se coupant en trois droites distinctes en dehors de $x = y = 0$. La courbe d'intersection de ces surfaces, en dehors de $x = y = 0$, est une courbe ayant un point triple en O'.

Par conséquent la transformée de la courbe C'_8 ayant un point triple en O', la courbe C'_8 a un point triple en O_4 auquel est infiniment voisin un point triple sur la droite $x_1 = x_2 = 0$.

La courbe C'_8 est donc un cas limite de la courbe C_8, mais il importait d'établir son existence.