Extrait de « Mathésis », t. LXVI, N° 1-2-3, 1957.

SUR LES SURFACES CUBIQUES NON RÉGLÉES OSCULANT UN PLAN LE LONG D'UNE DROITE,

par Lucien Godeaux,
Professeur à l'Université de Liège.

Détermination, en utilisant les propriétés de la polarité, des singularités d'une surface cubique non réglée assujettie à osculer un plan le long d'une droite.

1. Soit F une surface cubique non réglée osculant un plan α le long d'une droite r. La quadrique polaire Q d'un point quelconque P coupe la droite r en deux points distincts R_1, R_2 ou touche cette droite en un point R.

Examinons la première hypothèse. Au point R_1, le plan tangent à F doit d'une part passer par P et d'autre part coïncider avec α. Il est donc indéterminé et R_1 est double pour la surface.

Les droites passant par R_1 et situées dans α rencontrent F en trois points confondus en R_1, donc le plan α fait partie du cône tangent à F en R_1 et ce point est donc double biplanaire pour F.

De même, le point R_2 est double biplanaire pour F, un des plans tangents en ce point étant α.

Inversement, soit F une surface cubique non réglée possédant deux points doubles biplanaires R_1, R_2 tels qu'un plan α fasse partie à la fois du cône tangent en R_1 et du cône tangent en R_2.

La droite $r = R_1R_2$ appartient à la surface F. La section de F par le plan α doit avoir un point triple en R_1 et un point triple en R_2 ; elle se réduit donc à la droite r comptée trois fois. Le plan α oscule F le long de r.

2. Envisageons la seconde hypothèse. Comme dans la première, on voit que R est double pour F et que le plan α fait partie du cône tangent à F en R. Le point R est donc double biplanaire ou uniplanaire.

Supposons que R soit double biplanaire pour F et soit β le second plan tangent à F en ce point. Deux cas peuvent se présenter suivant que le plan β passe par r ou non.

Plaçons-nous dans le premier cas. Les plans tangents en un point double biplanaire rencontrent la surface F chacun suivant trois droites. Actuellement, le plan α coupe F suivant la droite r comptée trois fois ; le plan β coupe F suivant la droite r et suivant deux autres droites distinctes de r (sans quoi r serait double pour la surface).

Inversement, une surface cubique possédant un point double biplanaire satisfaisant à ces propriétés oscule le plan α suivant r.

Plaçons-nous maintenant dans le second cas. La conique γ, intersection de la quadrique polaire Q d'un point quelconque P avec le plan α, doit toucher la droite r et la droite $\alpha\beta$, distincte de r, en R. Cette conique dégénère donc en deux droites passant par R. Mais alors, les quadriques polaires de tous les points de l'espace touchent le plan α en R. Mais cette propriété n'est valable que si R est un point double uniplanaire, le cône tangent étant formé du plan α compté deux fois.

Il résulte de ce qui précède que si R est biplanaire, les deux plans tangents en R passent par r. De plus, R peut être double uniplanaire.

Supposons en effet que la surface F possède un point double uniplanaire R, le cône tangent étant formé d'un plan α compté deux fois. On sait que ce plan coupe en général la surface suivant trois droites distinctes. Si ces trois droites sont confondues en une droite r, F oscule le plan α le long de r.

3. Nous allons maintenant montrer que les surfaces rencontrées existent effectivement en formant leurs équations.

Considérons une surface de la première catégorie et supposons que les points R_1, R_2 soient les points $O_1(1, 0, 0, 0)$, $O_2(0, 1, 0, 0)$, le plan α ayant pour équation $x_3 = 0$. La surface

$$x_3[ax_1x_2 + x_1(a_{13}x_3 + a_{14}x_4) + x_2(a_{23}x_3 + a_{24}x_4)] + f_3(x_3, x_4) = 0,$$

où f_3 est une forme cubique en x_3, x_4 contenant le terme en x_4^3, répond à la question. Les cônes tangents en O_1, O_2 sont respectivement

$$x_3(ax_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4) = 0, \quad x_3(ax_1 + a_{23}x_3 + a_{24}x_4) = 0.$$

Si l'on pose $x_3 = 0$ dans l'équation, elle se réduit à

$$x_4^3f_3(0, 1) = 0,$$

ce qui montre bien que le plan $x_3 = 0$ oscule la surface le long de la droite O_1O_2 ou $x_3 = x_4 = 0$.

Considérons maintenant la surface

$$x_1x_2x_3 + x_2^3\varphi_0 + x_2^2\varphi_1 + x_2\varphi_2 + ax_3^3 = 0,$$

où les φ sont des formes en x_3, x_4 dont le degré est indiqué par l'indice.

Le point O_1 est double biplanaire ; l'un des plans tangents $x_2 = 0$ coupe la surface suivant la droite $x_2 = x_3 = 0$ comptée trois fois l'autre plan tangent $x_3 = 0$ coupe la surface suivant la droite précédente et suivant deux autres droites.

Considérons enfin la surface

$$x_1x_2^2 + x_2^3\varphi_0 + x_2^2\varphi_1 + x_2\varphi_2 + ax_3^3 = 0.$$

Le point O_1 est double uniplanaire et la surface oscule le plan $x_2 = 0$ le long de la droite $x_2 = x_3 = 0$.

4. En résumé :

La condition nécessaire et suffisante pour qu'une surface cubique non réglée F *oscule un plan* α *le long d'une droite* r *est :*

1° *que* F *possède deux points doubles biplanaires sur* r, *le plan* α *appartenant aux deux cônes tangents en ces points, ou*

2° *que* F *possède un point double biplanaire sur* r, *les deux plans tangents en ce point passant par* r *et l'un d'eux coupant la surface suivant la droite* r *comptée trois fois, ou*

3° *que* F *possède sur* r *un point double uniplanaire, le cône tangent étant formé du plan* α *compté deux fois et ce plan rencontrant* F *suivant la droite* r *comptée trois fois* [1].

---

[1] Dans notre note *Une congruence linéaire de coniques* (M, 1955, t. 64, pp. 337-340), il s'est glissé une erreur typographique qui nous a échappé lors de la correction des épreuves. Au bas de la page 339 il faut lire

$$x^2 + z\varphi_1 = 0, \quad y^2 + z\psi_1 = 0$$

au lieu de

$$x^2 + 2\varphi_1 = 0, \quad y^2 + 2\psi_1 = 0.$$