Sur un faisceau de surfaces algébriques irrégulières

par Lucien GODEAUX

Dans une communication (1) faite au IIIe Congrès des Mathématiciens autrichiens à Salzbourg, en septembre dernier, nous avons considéré un faisceau de surfaces d'équation

$$x_1^{4n} + x_2^{4n} + x_3^{4n} + x_4^{4n} - 2(x_1x_2)^{2n} - 2(x_1x_3)^{2n} - 2(x_1x_4)^{2n}$$
$$- 2(x_2x_3)^{2n} - 2(x_2x_4)^{2n} - 2(x_3x_4)^{2n} + a(x_1x_2x_3x_4)^n = 0.$$

Ce faisceau possède cette particularité de contenir trois surfaces dégénérées et est donc une généralisation du faisceau de surfaces desmiques du quatrième ordre, que l'on obtient du reste pour $n = 1$.

Pour $n = 3$, on obtient un faisceau de surfaces du huitième ordre possédant 24 tacnodes, répartis quatre par quatre sur les arêtes du tétraèdre de référence. Nous avons remarqué que ces surfaces sont irrégulières, les adjointes étant les surfaces d'ordre quatre passant par les arêtes du tétraèdre de référence.

Pour $n > 2$, on obtient également des surfaces irrégulières. Nous considérons dans cette note le cas $n = 3$ et nous formons l'équation des surfaces adjointes; nous montrons que les genres géométrique et arithmétique des surfaces sont respectivement $p_g = 63$ et $p_a = 57$. Les surfaces ont donc l'irrégularité six.

Le procédé utilisé peut servir dans le cas $n > 3$, mais conduit à des calculs assez longs.

1. Considérons la surface F, d'ordre douze, d'équations

$$x_1^{12} + x_2^{12} + x_3^{12} + x_4^{12} - 2\,x_1^6x_2^6 - 2\,x_1^6x_3^6 - 2\,x_1^6x_4^6$$
$$- 2\,x_2^6\,x_3^6 - 2\,x_2^6\,x_4^6 - 2\,x_3^6\,x_4^6 + a\,(x_1x_2x_3x_4)^3 = 0,$$

---

(1) *Une généralisation des surfaces desmiques.*

où nous supposons a fini et différent de ± 8. La surface F est irréductible et possède 36 points doubles tacnodaux particuliers distribués six par six sur les arêtes du tétraèdre de référence.

Les points d'intersection de F avec la droite $x_3 = 2$, $x_4 = 0$, sont donnés par

$$(x_1^6 - x_2^6)^2 = 0,$$

c'est-à-dire par

$$x_1 = 0, \; x_2 = 1, \; \varepsilon, \; \varepsilon^2, -1, 1 - \varepsilon, \; 1 - \varepsilon^2,$$

où ε est une racine cubique primitive de l'unité.

Soit P (1, 2, 0, 0) un de ces points. Il est double pour la surface F et le cône tangent à cette surface en ce point se réduit au plan

$$x_1 - x_2 = 0,$$

compté deux fois. Nous avons montré que le point P est un tacnode singulier pour la surface F. Précisément, celle-ci possède une droite double p infiniment voisine de P et une seconde droite double p' infiniment voisine de p. Nous montrerons, à la fin de cette note, que les adjointes à la surface F passent par le point P en y touchant le plan tangent à la surface en ce point.

2. Les adjointes d'ordre $n - 4$ à la surface F sont des surfaces du huitième ordre passant par les 36 points analogues à P et touchant en chacun de ces points le plan passant par l'arête opposée du tétraèdre de référence. Nous allons former l'équation de ces adjointes. Nous désignerons par F' une de ces adjointes.

Observons tout d'abord que si l'on fait $x_3 = 0$, $x_4 = 0$ dans l'équation de F', on doit pouvoir mettre en facteur $x_1^6 - x_2^6$ dans ce qui reste. On a des conclusions analogues pour les autres arêtes du tétraèdre et l'équation de F' peut s'écrire

$$\begin{aligned}
&a_1 x_1^2 (x_1^6 - x_2^6 - x_3^6 - x_4^6) + a_2 x_2^2(-x_1^6 + x_2^6 - x_3^6 - x_4^6) \\
&+ a_3 x_3^2 (-x_1^6 - x_2^6 + x_3^6 - x_4^6) + a_4 x_4^2 (-x_1^6 - x_2^6 - x_3^6 + x_4^6) \\
&+ a_{12} x_1 x_2 (a_1^6 - x_2^6) + a_{13} x_1 x_3 (x_1^6 - x_3^6) + a_{14} x_1 x_4 (x_1^6 - x_4^6) \\
&+ a_{23} x_2 x_3 (x_2^6 - x_3^6) + a_{24} x_2 x_4 (x_2^6 - x_4^6) + a_{34} x_3 x_4 (x_3^6 - x_4^6) \\
&\qquad + x_2 x_3 x_4 \, \varphi_1 (x_2, x_3, x_4) + x_3 x_4 x_1 \, \varphi_2 (x_3, x_4, x_1) \\
&\qquad + x_4 x_1 x_2 \, \varphi_3 (x_4, x_1, x_2) + x_1 x_2 x_3 \, \varphi_4 (x_1, x_2, x_3) \\
&\qquad + x_1 x_2 x_3 x_4 \, \varphi (x_1, x_2, x_3, x_4) = 0,
\end{aligned}$$

où φ_1, φ_2, φ_3, φ_4 sont des formes du cinquième ordre par rapport à leurs arguments et φ une forme du quatrième ordre.

Reprenons le point P $(1, \alpha, 0, 0)$ et écrivons le plan tangent à la surface F$'$ en ce point. On trouve

$$6(a_1 - a_2\,\alpha^2 + a_{12}\alpha)\;(x_4 - \alpha^5 x_2)$$
$$+\,x_3[a_{13} + a_{23}\alpha + \alpha\varphi_4(1,\alpha,0)] + x_4[a_{14} + a_{24}\alpha + \varphi_3(1,\alpha,0)] = 0.$$

Les termes en x_3 et x_4 doivent disparaître et on doit avoir identiquement

$$a_{13} + a_{23}\,\alpha + \alpha\varphi_4\,(1,\alpha,0) = 0,\; a_{14} + a_{24}\,\alpha + \varphi_3\,(1,\alpha,0) = 0.$$

Désignons par

$$\lambda_0\,x_1{}^5 + \lambda_1\,x_1{}^4\,x_2 + \lambda_2\,x_1{}^3\,x_2{}^2 + \lambda_3\,x_1{}^2\,x_2{}^3 + \lambda_4\,x_1\,x_2{}^4 + \lambda_5\,x_2{}^5$$

la partie de φ_4 (x_1, x_2, x_3) indépendante de x_3. Nous devons avoir

$$a_{13} + a_{23}\,\alpha + \alpha\,(\lambda_0 + \lambda_1\alpha + \lambda_2\,\alpha^2 + \lambda_3\alpha^3 + \lambda_4\,\alpha^4 + \lambda_5\,\alpha^5) = 0$$

pour $\alpha = 1, -1, \varepsilon, 1 - \varepsilon, \varepsilon^2, 1 - \varepsilon^2$. On obtient ainsi les relations

$$a_{13} + \lambda_5 + \lambda_1 + \lambda_3 = 0, \qquad a_{23} + \lambda_0 + \lambda_2 + \lambda_4 = 0,$$
$$a_{13} + \lambda_5 + \lambda_1\,\varepsilon^2 + \lambda_3\,\varepsilon = 0, \quad (a_{23} + \lambda_0)\,\varepsilon + \lambda_2 + \lambda_4\,\varepsilon^2 = 0,$$
$$a_{13} + \lambda_5 + \lambda_1\,\varepsilon + \lambda_3\,\varepsilon^2 = 0, \quad (a_{23} + \lambda_0)\,\varepsilon_2 + \lambda_2 + \lambda_4\varepsilon = 0.$$

On déduit de ces relations

$$\lambda_0 = -a_{23},\; \lambda_1 = 0,\; \lambda_2 = 0,\; \lambda_3 = 0,\; \lambda_4 = 0,\; \lambda_5 = -a_{13}.$$

La partie de φ_4 (x_1, x_2, x_3) indépendante de x_3 est donc

$$-a_{23}\,x_1{}^5 - a_{13}\,x_2{}^5.$$

En considérant le plan tangent à F$'$ au point $(1, 0, \alpha, 0)$, on obtient de même

$$a_{13} - a_{23}\,\alpha + \alpha\,\varphi_4\,(1, 0, \alpha) = 0,$$

d'où l'on déduit que la partie de φ_4 $(1, 0, \alpha)$ indépendante de x_2 est

$$a_{23}\,x_1{}^5 - a_{12}\,x_3{}^5.$$

En considérant le plan tangent à F′ au point (0, 1, α, 0), on obtient

$$-a_{12} - a_{13}\,\alpha + \alpha\varphi_4\,(0, 1, \alpha) = 0,$$

d'où l'on conclut que la partie de $\varphi_4\,(x_1, x_2, x_3)$ indépendante de x_1 est

$$a_{13}\,x_2^5 + a_{12}\,x_3^5.$$

Ces résultats ne sont possibles que si a_{12}, a_{13}, a_{23} sont nuls. On démontre de même que a_{14}, a_{24}, a_{34} sont nuls.

On voit en particulier que $\varphi_4\,(x_1, x_2, x_3)$ ne contient aucun terme indépendant d'une des variables x_1, x_2, x_3; on peut donc écrire

$$\varphi_4\,(x_1, x_2, x_3) \equiv x_1\,x_2\,x_3\,\psi_4\,(x_1, x_2, x_3),$$

où ψ_4 est du second degré. On obtient des conclusions analogues pour les polynomes φ_1, φ_2, φ_3.

3. D'après ce qui précède, l'équation de l'adjointe F s'écrit

$$\left.\begin{aligned}
&a_1x_1^2(x_1^6-x_2^6-x_3^6-x_4^6)+a_2x_2^2(-x_1^6+x_2^6-x_3^6-x_4^6)\\
&+a_3x_3^2(-x_1^6-x_2^6+x_3^6-x_4^6)+a_4x_4^2(-x_1^6-x_2^6-x_3^6+x_4^6)\\
&\quad+x_2^2x_3^2x_4^2\,\psi_1(x_2,x_3,x_4)+x_3^2x_4^2x_1^2\,\psi_2(x_3,x_2,x_4)\\
&\quad+x_4^2x_1^2x_2^2\,\psi_3(x_4,x_1,x_2)+x_1^2x_2^2x_3^2\,\psi_4(x_1,x_2,x_4)\\
&\quad+x_1x_2x_3x_4\,\varphi\,(x_1,x_2,x_3,x_4) = 0,
\end{aligned}\right\}\quad(1)$$

où ψ_1, ψ_2, ψ_3, ψ_4 sont des formes du second degré par rapport à leurs arguments.

Le plan tangent au point P (1, α, 0, 0) à la surface précédente est donné par

$$(a_1 - a_2\,\alpha^2)\,(x_1 - \alpha^5 x_2) = 0.$$

Le premier facteur n'est pas nul en général puisque a_1, a_2 peuvent prendre des valeurs arbitraires. Ce plan tangent est donc bien le plan tangent à F en P.

Le nombre des coefficients figurant dans l'équation (*i*) est $4 + 4 \times 6 + 35 = 63$, par conséquent : *Le genre géométrique de la surface* F *est* $p_g = 63$.

Les surfaces du huitième ordre linéairement indépendantes sont au nombre de 165. Pour qu'elles soient adjointes à la surface F, elles doivent passer par 36 points et avoir un plan tangent déterminé en chacun de ces points. Cela fait $36 \times 3 = 108$ conditions. Si celles-ci étaient indépendantes, le nombre des adjointes d'ordre huit linéairement indépendantes serait $165 - 108 = 57$. On en conclut que : *Le genre arithmétique de la surface* F *est* $p_a = 57$.

Par suite, *la surface* F *a l'irrégularité* $q = p_g - p_a = 6$.

Les surfaces F forment donc un faisceau $|F|$ de surfaces irrégulières et les surfaces F′ forment l'adjoint $|F'|$ à ce faisceau.

4. Il nous reste à établir le comportement des adjointes aux points singuliers de la surface F.

Considérons une surface Φ d'ordre m ayant un tacnode O. Soit a la droite double de Φ infiniment voisine de O et supposons que la surface possède une seconde droite double a_1, infiniment voisine de a. Choisissons une conique γ sans relation avec la surface et rapportons projectivement quadriques Q passent par O et γ aux plans de l'espace. La transformation birationnelle T ainsi établie fait correspondre aux plans de l'espace les quadriques Q′ passant par un point O′ et pour une conique γ'. A la surface Φ, T fait correspondre une surface Φ' d'ordre $2m - 2$, passant m fois par O′ et $m - 2$ fois par γ'. De plus, Φ' possède une droite double à dans le plan de γ' et une seconde droite double a'_1 infiniment voisine de a'.

Les adjointes Φ'_a à la surface Φ' sont des surfaces d'ordre $2\,m - 6$ passant $m - 2$ fois par O′, $m - 3$ fois par γ', une fois par a' et une fois par a'_1 (ou deux fois par a'). De ces surfaces se détache le cône projetant γ' de O′ et il reste des surfaces d'ordre $2\,m - 8$ passent $m - 4$ fois par O′, $m - 4$ fois une γ', une fois par a' et une fois par a'_1. De ces surfaces se détache le plan de la conique γ' et il reste finalement des surfaces d'ordre $2\,m - 9$, passant $m - 4$ fois par O′, $m - 5$ fois par γ' et une fois par a'. Le transformation T^{-1} fait correspondre à ces surfaces des surfaces Φ_a d'ordre $m - 4$, passant une fois par O et une fois par a, c'est-à-dire touchant en O la surface Φ. Les surfaces Φ_a ne passent pas par la conique γ et sont les adjointes à la surface Φ.

L'équation de la surface Φ s'écrit, en supposant que le point O ait pour coordonnées (0, 0, 0, 1) et que le plan tangent en ce point soit $x_3 = 0$,

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{4} x_4^{m-4} [2\, x_3\, x_4 + \psi_2 (x_1, x_2)]^2 \\
&+ x_4^{m-3}\, x_3^2 [x_3\, \psi_0 + \psi_1 (x_1, x_2)] \\
&+ x_4^{m-4}\, x_3 [x_3^3 \chi_0 + x_3^2 \chi_1 (x_1, x_2) + x_3 \chi_2 (x_1, x_2) + \chi_3 (x_1, x_2)] \\
&+ x_4^{m-5}\, \varphi_5 (x_1, x_2, x_3) + \ldots + \varphi_m (x_1, x_2, x_3) = 0,
\end{aligned}$$

où les ψ, χ, φ sont des formes algébriques de leurs arguments dont les degrés sont indiqués par les indices.

Liège, le 12 août 1952.