Sur l'ordre d'une involution cyclique appartenant à une surface algébrique

par Lucien GODEAUX,
Membre de la Société

Dans nos recherches sur les involutions cycliques d'ordre premier $p>2$ appartenant à une surface algébrique F et n'ayant qu'un nombre fini de points unis, nous avons classé ceux-ci de la manière suivante [1] : à tout point uni sont attachés deux nombres α, β compris entre 1 et p. Si $\alpha = \beta$, le point uni est de première espèce, si $\alpha \neq \beta$, de seconde espèce. Pour étudier ceux-ci, nous avons été conduit à considérer les solutions en nombres entiers positifs des congruences

$$\lambda + \alpha\mu \equiv 0, \qquad \mu + \beta\lambda \equiv 0, \qquad (\text{mod. } p)$$

Si λ_1, μ_1 est celle de ces solutions pour laquelle la somme $\lambda_1 + \mu_1$ est minimum, on a

$$\lambda_1 + \alpha\mu_1 = hp, \qquad \mu_1 + \beta\,\lambda_1 = h'p.$$

Le point uni est dit de première, seconde ou troisième catégorie suivant que les nombres h, h' sont tous deux égaux à l'unité, qu'un seul de ces nombres est égal à l'unité ou qu'ils sont tous deux supérieurs à l'unité.

---

(1) *Les involutions cycliques appartenant à une surface algébrique* (Actualités scient., N° 270, Paris, Hermann, 1935); *Mémoire sur les surfaces multiples* (Mém, in- 8° de l'Acad. roy de Belgique, 1952); *Sur un point de diramation d'une surface multiple en lequel le cône tangent se décompose en quatre parties* (Rend. del Seminario Matematico di Torino, 195-52, pp. 203-222); *Les singularités des points de diramation isolés des surfaces multiples* (Deuxième Colloque de Géométrie algébrique C.B.R.M.; Liège, Thone et Paris, Masson, 1952, pp. 235-241); *Sur quelques points de diramation de seconde espèce et de troisième catégorie d'une surface multiple* (Bull. de l'Acad. roy. de Belgique, 1952, pp. 755-765, 898-907).

Soit Φ une surface image de l'involution sur laquelle les points de diramation sont isolés. Si le point de diramation correspond à un point uni de la troisième catégorie, le cône tangent à la surface Φ en ce point se scinde en quatre cônes rationnels.

Dans cette note, nous supposons que la surface Φ possède un point de diramation de cette nature et nous en déduisons la valeur de l'ordre p de l'involution.

1. — Soit F une surface algébrique contenant une involution I, cyclique, d'ordre premier impair p, n'ayant qu'un nombre fini de points unis. Supposons construite une surface normale Φ, image de cette involution, dont les points de diramation sont isolés, suivant la méthode indiquée dans nos travaux antérieurs.

Soit A$'$ un point de diramation de la surface Φ de seconde espèce et de la troisième catégorie. A ce point sont attachés deux nombres entiers positifs α, β tels que $\alpha\beta - 1$ soit multiple de p. De plus, si λ_1, μ_1 est une solution des congruences

$$\lambda + \alpha\mu \equiv 0, \qquad \mu + \beta\lambda \equiv 0, \qquad (\text{mod. } p)$$

telle que λ_1, μ_1 soient positifs et que la somme $\lambda_1 + \mu_1$ soit la plus petite possible, on a

$$\lambda_1 + \alpha\mu_1 = hp, \qquad \mu_1 + \beta\lambda_1 = h'p$$

où h, h' sont supérieurs à l'unité.

Posons

$$p = a\alpha + b, \quad p = b'\beta + a', \qquad (b < \alpha;\ a' < \beta);$$

soient m, n deux entiers tels que

$$(h - 1)\, b < m\alpha < hb,$$
$$(h' - 1)\, a' < n\beta < h'a'.$$

Dans ces conditions, le point A$'$ est multiple d'ordre

$$m + n + a + b'$$

pour la surface Φ et le cône tangent en ce point à cette surface se scinde en quatre cônes rationnels respectivement d'ordres m, n, a, b'.

Projetons la surface Φ du point A′ sur un hyperplan de l'espace ambiant. Nous obtenons une surface Φ_1 sur laquelle, au domaine du point A′ correspond un ensemble de courbes rationnelles :

σ_1, d'ordre a et de degré virtuel — $(a+1)$,

τ_1, d'ordre m, de degré virtuel — $(m+2)$,

τ_2, d'ordre n, de degré virtuel — $(n+2)$,

σ_2, d'ordre b', de degré virtuel — $(b'+1)$.

Les courbes τ_1, τ_2 se rencontrent sur un point A'_1, les courbes σ_1, τ_1 en un point A'_{11}, les courbes τ_2, σ_2 en un point A'_{12}. Les courbes σ_1, τ_1, τ_2, σ_2 ne se rencontrent pas deux à deux en d'autres points.

2. — Les points A'_1, A'_{11}, A'_{12} peuvent être simples ou doubles pour la surface Φ. Dans ce dernier cas, ils sont équivalents à des suites de courbes rationnelles de degré virtuel — 2.

Supposons, que le point A'_1 soit équivalent à t courbes

$$\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_t,$$

rationnelles, de degré virtuel — 2, chacune de ces courbes rencontrant la précédente et la suivante en un point, mais ne rencontrant pas les autres. De plus, ρ_1 rencontre τ_1 en un point et ρ_t rencontre τ_2 en un point.

Si $t>1$, A'_1 est double biplanaire, si $t=1$, double conique et si $t=0$, simple pour la surface Φ_1.

Supposons que le point A'_{11} soit équivalent à u courbes rationnelles de degré — 2.

$$\omega'_1, \omega'_2, \ldots, \omega'_a,$$

dont chacune rencontre la précédente et la suivante en un point, mais ne rencontre pas les autres. De plus, ω'_1 rencontre σ_1 en un point et ω'_u rencontre τ_1 en un point.

Supposons enfin que le point A'_{12} soit équivalent à v courbes rationnelles de degré — 2,

$$\omega''_1, \omega''_2, \ldots, \omega''_v$$

dont chacune rencontre la précédente et la suivante en un point, mais ne rencontre pas les autres. La courbe ω''_1 rencontre τ_2 en un point et la courbe ω''_v rencontre σ_2 en un point.

Il existe, sur la surface Φ_1, au moins une courbe Γ_1, rencontrant σ_1 en un point mais ne rencontrant pas les autres courbes composant la singularité de Φ en A', liée aux sections hyperplanes Γ_o de Φ par la relation fonctionnelle

$$\left.\begin{aligned} p\Gamma_o \equiv p\Gamma_1 &+ \xi_1 \sigma_1 + \eta'_1 \omega'_1 + \eta'_2 \omega'_2 + \ldots + \eta'_u \omega'_u \\ &+ \xi'_1 \tau_1 + \eta_1 \rho_1 + \eta_2 \rho_2 + \ldots + \eta_t \rho_t + \xi'_2 \tau_2 \\ &+ \eta''_1 \omega''_1 + \eta''_2 \omega''_2 + \ldots + \eta''_v \omega''_v + \xi_2 \sigma + \Delta, \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

où les ξ et η sont des entiers, Δ provenant des autres points de diramation.

3. — Pour déterminer les entiers $\xi_1, \eta'_1, \ldots, \xi_2$, coupons successivement la courbe (1) par les courbes $\sigma_2, \omega''_v, \ldots, \sigma_1$. Nous obtenons ainsi les équations

$$\eta''_v - (b' + 1)\,\xi_2 = 0$$
$$\eta''_{v-1} - 2\eta''_v + \xi_2 = 0,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\eta''_1 - 2\eta''_2 + \eta''_3 = 0,$$
$$\xi'_2 - 2\eta''_1 + \eta''_2 = 0,$$
$$\eta_t - (n + 2)\,\xi'_2 + \eta''_1 = 0,$$
$$\eta_{t-1} - 2\eta_t + \xi'_2 = 0,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\eta_1 - 2\eta_2 + \eta_3 = 0,$$
$$\xi'_1 - 2\eta_1 + \eta_2 = 0,$$
$$\eta_u - (m + 2)\,\xi'_1 + \eta_1 = 0,$$
$$\eta'_{u-1} - 2\eta'_u + \xi'_1 = 0,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\eta'_1 - 2\eta'_2 + \eta'_3 = 0,$$
$$\xi_1 - 2\eta'_1 + \eta'_2 = 0$$
$$p - (a + 1)\,\xi_1 + \eta'_1 = 0.$$

On en déduit successivement

$$\eta''_v = (b' + 1)\xi_2,$$
$$\eta''_{v-i} = [(i + 1)\,b' + 1]\xi_2,$$
$$\eta''_1 = (vb' + 1)\,\xi_2,$$
$$\xi'_2 = [(v + 1)\,b' + 1]\xi_2,$$
$$\eta_t = [\{(n + 1)(v + 1) + 1\}\,b' + n + 1]\xi_2.$$

En posant

$$\mathrm{V} = n\,(v + 1) + 1,$$

on aura

$$\eta_t = [(\mathrm{V} + v + 1)\,b' + n + 1]\,\xi_2,$$
$$\eta_{t-i} = [\{(i + 1)\,\mathrm{V} + v + 1\}\,b' + (i + 1)\,n + 1]\,\xi_2,$$
$$\eta_1 = [(t\mathrm{V} + v + 1)\,b' + tn + 1]\,\xi_2,$$
$$\xi'_1 = [\{(t + 1)\,\mathrm{V} + v + 1\}\,b' + (t + 1)\,n + 1]\,\xi_2.$$

On peut écrire

$$\xi'_1 = \eta_1 + (\mathrm{V}b' + n)\,\xi_2.$$

On a alors

$$\eta'_u = (m + 1)\,\eta_1 + (m + 2)\,(\mathrm{V}b' + n)\,\xi_2,$$
$$\eta'_{u-i} = [(i + 1)\,m + 1]\eta_1 + [(i + 1)\,m + i + 2]\,(\mathrm{V}b' + n)\xi_2,$$
$$\eta'_1 = (um + 1)\,\eta_1 + (um + u + 1)(\mathrm{V}b' + n)\,\xi_2,$$
$$\xi_1 = [(u + 1)\,m + 1]\eta_1 + [(u + 1)\,m + u + 2]\,(\mathrm{V}b' + n)\xi_2.$$

Nous poserons

$$\mathrm{U} = m\,(u + 1) + 1,$$

d'où

$$\eta'_1 = (\mathrm{U} - m)\,\eta_1 + (\mathrm{U} - m + u)\,(\mathrm{V}b' + n)\,\xi_2,$$
$$\xi_1 = \mathrm{U}\,\eta_1 + (\mathrm{U} + u + 1)\,(\mathrm{V}b' + n)\,\xi_2.$$

On a enfin

$$p = (a\mathrm{U} + m)\,\eta_1 + [a\,\mathrm{U} + a\,(u+1) + m + 1]\,(\mathrm{V}b' + n)\,\xi_2.$$

η_1 admet comme facteur ξ_2, donc p admet comme facteur ξ_2. Dans le second membre de la formule précédente, le coefficient de ξ_2 est certainement supérieur à l'unité et p étant premier, on a $\xi_2 = 1$.

4. — En remplaçant η_1 et ξ_2 par leurs valeurs, on obtient la valeur de p :

$$\begin{aligned} p = {} & [(t+1)\,\mathrm{UV} + (v+1)\,\mathrm{U} + (u+1)\,\mathrm{V}]ab' \\ & + [(tn + n + 1)\,\mathrm{U} + n\,(u+1)]\,a \\ & + [(tm + m + 1)\,\mathrm{V} + m\,(v+1)]\,b' \\ & + (t+1)\,mn + m + n. \end{aligned}$$

Il existe, sur Φ_1, une courbe Γ_2 au moins, ne rencontrant dans le domaine A' sur Φ que la courbe σ_2 (en un point) et donnant lieu à une égalité fonctionnelle analogue à (1). Le calcul qui vient d'être fait, répété dans ce cas, conduira évidemment à la même valeur de p, celle-ci étant symétrique par rapport à U, V, u, v, m, n, a, b', t.

5. — Ecrivons pour abréger

$$p = \mathrm{A}ab' + \mathrm{B}a + \mathrm{C}b' + \mathrm{D}.$$

En comparant à $p = a\alpha + b$ et à $p = b'\beta + a'$, on a

$$\alpha = \mathrm{A}b' + \mathrm{B}, \qquad b = \mathrm{C}b' + \mathrm{D},$$
$$\beta = \mathrm{A}a + \mathrm{C}, \qquad a' = \mathrm{B}a + \mathrm{D}.$$

On a d'ailleurs $b < \alpha$, $a' < \beta$.

$\alpha\beta - 1$ doit être divisible par p. Si effectivement, on divise

$$(\mathrm{A}b' + \mathrm{B})(\mathrm{A}a + \mathrm{C}) - 1$$

par p, on trouve pour coefficient A et pour reste

$$\mathrm{BC} - \mathrm{AD} - 1.$$

Un calcul simple montre que cette quantité est identiquement nulle. Par conséquent, on a

$$\alpha\beta - 1 = \mathrm{A}p.$$

Observons que nous pouvons écrire

$$\begin{aligned} p = {} & [(t+1)\,mn + m + n]\,[(u+1)\,a + 1]\,[(v+1)\,b' + 1] \\ & + [(t+1)\,m + 1]\,[(u+1)\,a + 1]\,b' \\ & + [(t+1)\,n + 1]\,[(v+1)\,b' + 1]\,a + (t+1)\,ab'. \end{aligned}$$

Nous avons alors

$$\begin{aligned} \alpha = {} & [(t+1)\,mn + m + n]\,(u+1)\,[(v+1)\,b' + 1] \\ & + [(t+1)m+1]\,(u+1)b' + [(t+1)n+1]\,[(v+1)b'+1] + (t+1)b' \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} b = {} & [(t+1)\,mn + m + n]\,[(v+1)\,b' + 1] \\ & + [(t+1)\,m + 1]\,b', \end{aligned}$$

d'où l'on déduit

$$\alpha = (u+1)\,b + b_1$$

en posant

$$b_1 = [(t+1)\,n + 1]\,[(v+1)\,b' + 1] + (t+1)\,b'.$$

Nous devons déterminer un nombre h tel que

$$(h-1)\,b < m\alpha < hb.$$

On a $mb_1 < b$, donc on aura

$$h = m\,(u+1) + 1.$$

On trouverait de même

$$h' = n\,(v+1) + 1.$$

6. — Dans notre note du Colloque de Liège, citée plus haut, nous avions donné les valeurs suivantes pour λ_1, μ_1 :

$$\lambda_1 = m\,(h_1 b - \alpha) - (m-1)b, \quad \mu_1 = m\,(h_1 a + 1) - (m-1)a,$$

où h_1 est donné par

$$h = mh_1 - m + 1.$$

En intervertissant les rôles de α, β, on trouve

$$\lambda_1 = n\,(h_1'b' + 1) - (n - 1)\,b', \; \mu_1 = n\,(h_1'a' - \beta) - (n - 1)\,a',$$

où h_1' est donné par

$$h' = nh_1' - n + 1.$$

D'après les valeurs trouvées plus haut pour h, h', on trouve

$$h_1 = u + 2, \quad h_1' = v + 2.$$

On obtient ensuite, quelles que soient les valeurs de λ_1, μ_1 dont on part,

$$\lambda_1 = b'\mathrm{V} + n, \quad \mu_1 = a\mathrm{U} + m\,.$$

Liège, le 25 janvier 1953.