Etude de quelques surfaces algébriques

par LUCIEN GODEAUX,
Membre de la Société

Dans un travail antérieur (1), nous avons rencontré des surfaces que l'on peut construire de la manière suivante : Considérons la variété de Veronese généralisée φ_1 représentant les hyperquadriques d'un espace linéaire à r dimensions et la variété analogue φ_2 représentant les hyperquadriques d'un espace linéaire à s dimensions; soient σ_1, σ_2 les espaces linéaires qui contiennent respectivement ces variétés. Supposons que σ_1, σ_2 soient immergés dans l'espace de dimension minimum dans lequel ils sont indépendants. Projetons alors φ_1 de σ_2 et φ_2 de σ_1; les variétés obtenues ont en commun une variété; les surfaces rencontrées sont les sections de cette variété par des espaces linéaires de dimension convenable.

Cette construction peut être généralisée en considérant plusieurs variétés. C'est à une telle généralisation qu'est consacrée cette note.

Nous considérons trois espaces linéaires Σ_1, Σ_2, Σ_3 ne se coupant pas deux à deux, situés dans un espace de dimension minimum, de même dimension. Dans chacun de ces espaces, nous considérons une courbe rationnelle; soient Γ_1, Γ_2, Γ_3 ces courbes. On considère la variété projetant de l'espace minimum contenant Σ_2, Σ_3 la courbe Γ_1, et les deux variétés analogues que l'on obtient par permutation tournante en projetant Γ_2 et Γ_3. Ces trois variétés ont en commun une vaiiété à cinq dimensions. Nous considérons les surfaces F sections de cette variété par des espaces linéaires de dimension convenable.

Nous commençons par considérer le cas où Γ_1, Γ_2, Γ_3 sont des cubiques gauches; nous montrons que l'on peut transformer birationnellement F en une surface du neuvième ordre de l'es-

---

(1) *Sur les courbes et surfaces intersections d'hyperquadriques* (Bulletin de l'Acad. roy. de Belgique, 1944, pp. 262-269).

pace ordinaire ayant pour droites triples les côtés d'un triangle et pour points sextuples, les sommets de ce triangle. On en déduit facilement le système canonique et on montre ensuite que l'on peut transformer la surface en une surface intersection de la variété de C. Segre produit de trois ponctuelles avec une hypersurface cubique. Cette surface, que nous avions rencontrée autrefois, est projectivement canonique.

Nous étudions ensuite le cas où Γ_1, Γ_2, Γ_3 sont des coniques; dans cette hypothèse, F est une surface de genre un. Nous passons ensuite au cas où Γ_1, Γ_2, Γ_3 sont des courbes d'ordre n

1. Considérons, dans un espace linéaire S_{11} à onze dimensions, trois espaces linéaires à trois dimensions Σ_1, Σ_2, Σ_3 ne se rencontrant pas deux à deux. Désignons les coordonnées homogènes de S_{11} par X_0, X_1, X_2, X_3, Y_0, Y_1, Y_2, Y_3, Z_0, Z_1, Z_2, Z_3, de telle sorte que les équations de Σ_1 soient $Y_i = Z_i = 0$, celles de Σ_2, $Z_i = X_i = 0$, enfin celles de Σ_3, $X_i = Y_i = 0$.

Dans chacun des espaces Σ_1, Σ_2, Σ_3, donnons-nous une cubique gauche. Soient respectivement Γ_1, Γ_2, Γ_3 ces courbes et

$$\left\| \begin{matrix} X_0 & X_1 & X_2 \\ X_1 & X_2 & X_3 \end{matrix} \right\| = 0, \quad \left\| \begin{matrix} Y_0 & Y_1 & Y_2 \\ Y_1 & Y_2 & Y_3 \end{matrix} \right\| = 0, \quad \left\| \begin{matrix} Z_0 & Z_1 & Z_2 \\ Z_1 & Z_2 & Z_3 \end{matrix} \right\| = 0$$

leurs équations.

Les espaces linéaires à huit dimensions passant par Σ_2, Σ_3 et par les différents points de Γ_1 engendrent une variété V_9^3 à neuf dimensions, d'ordre trois. Soient de même V'^3_9 la variété engendrée par les espaces linéaires passant par Σ_3, Σ_1 et par les points de Γ_2, V''^3_9 la variété engendrée par les espaces à huit dimensions passant par Σ_1, Σ_2 et par les différents points de Γ_3.

Les variétés V_9^3, V'^3_9, V''^3_9 ont en commun une variété V_5^{27}, à cinq dimensions, d'ordre 27. Nous allons considérer les surfaces sections de cette variété V_5^{27} par les espaces linéaires à huit dimensions de S_{11}.

Un de ces espaces est représenté par les équations de trois hyperplans; nous écrirons ces équations sous la forme

$$\sum_{i+0}^{3} a_{ki} X_i + \sum_{i=0}^{3} b_{ki} Y_i + \sum_{i=0}^{3} c_{ki} Z_i = 0,$$
$$(k = 1, 2, 3).$$

La surface F section de la variété V_5^{27} par l'espace S_8 commun à ces trois hyperplans a l'ordre 27 et rencontre les espaces Σ_1, Σ_2, Σ_3, qui sont multiples d'ordre neuf pour V_5^{27}, chacun en un point .On supposera que ces points n'appartiennent pas à Γ_1, Γ_2, ou Γ_3.

2. On peut obtenir une transformée birationnelle de la surface F dans l'espace à trois dimensions de la manière suivante :

Posons

$$\frac{X_0}{x_1^3} = \frac{X_1}{x_1^2 x_0} = \frac{X_2}{x_1 x_0^2} = \frac{X_3}{x_0^3} = \rho_1 ,$$

$$\frac{Y_0}{y_1^3} = \frac{Y_1}{y_1^2 x_0} = \frac{Y_2}{y_1 x_0^2} = \frac{Y_3}{x_0^3} = \rho_2 ,$$

$$\frac{Z_0}{z_1^3} = \frac{Z_1}{z_1^2 x_0} = \frac{Z_2}{z_1 x_0^2} = \frac{Z_3}{x_0^3} = \rho_3 .$$

Les équations des trois hyperplans définissant S_8 donnent

$$\rho_1 \Sigma a_{ki} \, x_1^{3-i} \, x_0^i + \rho_2 \Sigma b_{ki} \, y_1^{3-i} \, x_0^i + \rho_3 \Sigma c_{ki} \, z_1^{3-i} \, x_0^i = 0,$$
$$(k = 1, \ 2, \ 3).$$

En éliminant ρ_1, ρ_2, ρ_3 entre ces équations, on obtient le déterminant

$$| \Sigma a_{ki} \, x_1^{3-i} \, x_0^i \quad \Sigma b_{ki} \, y_1^{3-i} \, x_0^i \quad \Sigma c_{ki} \, z_1^{3-i} \, x_0^i | = 0,$$
$$(k = 1, \ 2, \ 3).$$

Cette équation représente une surface F_1 du neuvième ordre, appartenant à l'espace à trois dimensions dont les coordonnées ponctuelles sont x_0, x_1, y_1, z_1, birationnellement identique à F. La surface F_1 possède trois droites triples $x_0 = x_1 = 0$, $x_0 = y_1 = 0$, $x_0 = z_1 = 0$ et trois points sextuples $x_0 = y_1 = z_1 = 0$, $x_0 = z_1 = x_1 = 0$, $x_0 = x_1 = y_1 = 0$.

Les adjointes d'ordre $9 - 4 = 5$ à la surface F_1 passent deux fois par les droites triples et quatre fois par les points sextuples de la surface, par conséquent, elles comprennent le plan $x_0=0$ comme partie fixe et sont complétées par les surfaces du quatrième ordre passant par les droites triples et passent trois fois par les points sextuples. Ces surfaces du quatrième ordre contiennent à leur tour le plan $x_0 = 0$ et sont complétées par les surfaces cubiques passant doublement par les points sextuples et, par suite, simplement par les droites triples. Ces surfaces cubiques ont pour équation

$$\lambda_0 x_0^3 + x_0^2 (\lambda_1 x_1 + \mu_1 y_1 + \nu_1 z_1) + x_0 (\lambda_2 y_1 z_1 + \mu_2 z_1 x_1 + \nu_2 x_1 y_1) + \lambda x_1 y_1 z_1 = 0 .$$

On en conclut que la surface F_1 et par conséquent la surface F, a le genre géométrique $p_g = 8$.

3. Nous avons

$$x_1 = \frac{X_0}{X_1} x_0, \quad y_1 = \frac{Y_0}{Y_1} x_0, \quad z_1 = \frac{Z_0}{Z_1} x_0$$

et par conséquent les courbes canoniques de la surface F sont découpées sur celle-ci par les hypersurfaces

$$\lambda_1 X_1 Y_1 Z_1 + \lambda_1 X_0 Y_1 Z_1 + \mu_1 X_1 Y_0 Z_1 + \nu_1 X_1 Y_1 Z_0$$
$$+ \lambda_2 X_1 Y_0 Z_0 = \mu_2 X_0 Y_1 Z_0 = \nu_2 X_0 Y_0 Z_1 + \lambda X_0 Y_0 Z_0 = 0 .$$

Ces hypersurfaces sont des cônes projetant de l'espace S_5 d'équations

$$X_0 = X_1 = Y_0 = Y_1 = Z_0 = Z_1 = 0,$$

une hypersurface cubique située dans l'espace S_5 d'équations

$$X_2 = X_3 = Y_2 = Y_3 = Z_2 = Z_3 = 0 .$$

Dans cet espace S_5, l'hypersurface cubique contient les trois espaces à trois dimensions d'équations $X_0 = X_1 = 0$, $Y_0 = Y_1 = 0$, $Z_0 = Z_1 = 0$. Elle possède des points doubles coniques aux sommets de la figure de référence et est donc circonscrite à celle-ci.

4. Revenons à la surface F_1 et rapportons projectivement aux hyperplans d'un espace S_7 à sept dimensions en posant

$$\frac{X_{000}}{x_0^3} = \frac{X_{100}}{x_0^2 x_1} = \frac{X_{010}}{x_0^2 y_1} = \frac{X_{001}}{x_0^2 z_1} = \frac{X_{011}}{x_0 y_1 z_1} = \frac{X_{101}}{x_0 z_1 x_1} = \frac{X_{110}}{x_0 y_1 z_1} = \frac{X_{111}}{x_1 y_1 z_1} .$$

Nous obtenons, dans S_7, la variété V_3^6 de C. Segre, qui représente les points de trois droites ([1]), c'est-à-dire le produit de trois droites.

A la surface F_1 correspond l'intersection de V_3^6 et d'une hypersurface cubique V_6^3 dont l'équation s'écrit

$$| a_{k0}\, b_{k0}\, c_{k0} |\, X_{111}^3 + | a_{k0}\, b_{k0}\, c_{k1} |\, X_{111}^2\, X_{110} + | a_{k0}\, b_{k0}\, c_{k2} |\, X_{111}\, X_{110}^2$$
$$+ | a_{k0}\, b_{k0}\, c_{k3} |\, X_{110}^3 + \ldots + | a_{k3}\, b_{k3}\, c_{k3} |\, X_{000}^3 = 0\,.$$

C'est donc une hypersurface cubique dont l'équation comprend tous les termes.

Appelons F_2 la surface commune à V_3^6 et à V_6^3. Cette surface est d'ordre 18; elle est birationnellement équivalente à F_1, donc à F et ses sections hyperplanes forment son système canonique ([2]). Elle a par conséquent le genre linéaire $p^{(1)} = 19$. La surface F_2 est d'autre part régulière, car les intersections de V_3^6 et de deux hypersurfaces cubiques de S_9 est en général irréductible.

Si l'on considère dans un espace à onze dimensions, trois espaces à trois dimensions ne se rencontrant pas deux à deux et dans chacun de ces espaces une cubique gauche, les variétés V_9^3 lieux des espaces à huit dimensions passant par deux de ces espaces à trois dimensions et par les points de la cubique gauche de l'autre ont en commun une variété V_5^{27}. Les sections de cette variété par les espaces à huit dimensions sont des surfaces de genres

$$p_a = p_9 = 8, \quad p^{(1)} = 19\,.$$

Chacune de ces surfaces est birationnellement équivalente à la section de la variété de Segre V_3^6, produit de trois ponctuelles et d'une hypersurface cubique. Les sections hyperplanes de cette surface en constituent le système canonique.

([1]) Voir L. Godeaux, *Géométrie Algébrique*, tome 1er (Liège, Sciences et Lettres), 1948). Voir pp. 209 et 210.

([2]) *Sur les variétés appartenant à la variété de Segre représentant les points de n ponctuelles* (Bull. Soc. roy. des Sciences de Liège, 1938, pp. 520-524).

5. Considérons maintenant, dans un espace S_8 à huit dimensions, trois plans σ_1, σ_2, σ_3 ne se rencontrant pas deux à deux et dans chacun de ces plans, une conique respectivement γ_1, γ_2, γ_3.

Soient V_7^2 la variété lieu des espaces à six dimensions passant par σ_2, σ_3 et par les points de la conique γ_1, V'^2_7, V''^2_7 les variétés analogues obtenues par permutation tournante des plans σ_1, σ_2, σ_3 et des coniques γ_1, γ_2, γ_3. Ces trois variétés ont en commun une variété V_5^8. Appelons F la surface intersection de V_5^8 par un espace linéaire à cinq dimensions.

On peut présumer que F sera une surface de genres $p_a = P_4 = 1$, à courbe canonique d'ordre zéro, car c'est l'intersection de trois hyperquadratiques (coniques) d'un espace S_5. On va voir qu'il en est bien ainsi.

En calquant le procédé employé plus haut, on voit que la surface F est birationnellement identique à la surface F_1 d'équation

$$\left| \Sigma\, a_{ki}\, x_1^{2-i}\, x_0^i \quad \Sigma\, b_{ki}\, x_1^{2-i}\, x_0^i \quad \Sigma\, c_{ki}\, z_1^{2-i}\, x_0^i \right| = 0$$
$$(k = 1,\ 2\ 3).$$

de S_3. F_1 est une surface du sixième ordre, passant doublement par les droites $x_0 = x_1 = 0$, $x_0 = y_1 = 0$, $x_0 = z_1 = 0$ et quadruplement par les sommets du triangle formé par ces droites.

Les adjointes d'ordre $6 - 4 = 2$ à F_1 sont des quadriques passant doublement par les points quadruples; elles se réduisent en plan $x_0 = 0$ compté deux fois et par conséquent la surface F_1 a les genres

$$p_a = P_4 = 1,\ p^{(1)} = 1\ .$$

On peut voir que la surface F_1 est birationnellement équivalente à la section de la variété de Segre, V_3^6, de S_7, par une hyperquadratique, surface que l'on sait être de genres un [1].

6. L'extension des résultats précédents se fait sans difficulté. On considère, dans un espace linéaire S_{3n+2} à $3n + 2$ dimensions,

---

[1] *Sur les variétés appartenant...* (loc. cit).

trois espaces linéaires Σ_1, Σ_2, Σ_3 à n dimensions ne se rencontrent pas deux à deux et, dans chacun de ces espaces, une courbe rationnelle normale d'ordre n. Soient Γ_1, Γ_2, Γ_3 ces trois courbes.

Projetons Γ_1 de l'espace S_{2n+1} contenant Σ_2, Σ_3; Γ_2 de l'espace S_{2n+1} contenant Σ_3, Σ_1 et Γ_3 de l'espace S_{2n+1} contenant Σ_1 Σ_2. Nous obtenons ainsi trois variétés d'ordre n, à $2n+3$ dimensions, ayant en commun une variété V_5, à cinq dimensions, d'ordre n^3.

La surface F, section de cette variété V_5 par un espace linéaire à $3n-1$ dimensions, est birationnellement équivalente à une surface F_1 de S_3 dont l'équation peut s'écrire

$$\left| \Sigma\, a_{ki}\, x_1^{n-i}\, x_0^i \quad \Sigma\, b_{ki}\, y_1^{n-i}\, x_0^i \quad \Sigma\, c_{ki}\, z_1^{n-i}\, x_0^i \right| = 0\,.$$

F_1 est une surface d'ordre $3n$, passant n fois par chacune des droites $x_0 = x_1 = 0$, $x_0 = y_1 = 0$, $x_0 = z_1 = 0$ et $2n$ fois par les sommets du triangle formé par ces droites. Les adjointes d'ordre $3n-4$ à F_1 passent $n-1$ fois par chacune des droites précédentes et $2n-2$ fois par les sommets du triangle qu'elles forment. Elles contiennent donc une première fois le plan $x_0=0$ et sont complétées par des surfaces d'ordre $3n-5$ passant $n-2$ fois par les droites multiples de F_1 et $2n-3$ fois par les sommets du triangle qu'elles forment. La section d'une telle surface par le plan $x_0 = 0$ comprend les droites comptées chacune $n-2$ fois et une droite qui doit passer par les sommets du triangle. Par conséquent ces surfaces contiennent encore le plan $x_0 = 0$ comme partie et les parties variables des adjointes sont donc des surfaces d'ordre $3(n-2)$. Théoriquement, ces surfaces doivent passer $n-3$ fois par les trois droites et $2(n-2)$ fois par les sommets du triangle. On en conclut que le plan $x_0 = 0$ rencontre les surfaces suivant les trois droites comptées chacune $n-2$ fois et non $n-3$ fois.

Considérons la section d'une de ces surfaces d'ordre $3(n-2)$ par un plan passant par la droite $x_0 = x_1 = 0$ par exemple. C'est une courbe d'ordre $3(n-2)$ ayant aux points $x_0 = x_1 = y_1 = 0$, $x_0 = x_1 = z_1 = 0$ la multiplicité $2(n-2)$; par conséquent, cette courbe contient n $-$ 2 fois la droite $x_0 = x_1 = 0$.

On voit donc finalement que les parties variables des adjointes à F_1 sont des surfaces d'ordre $3(n-2)$ passant $n-2$ fois par trois droites et $2(n-2)$ fois par les sommets du triangle qu'elles forment.

Il est alors facile de voir que F_1 est birationnellement identique à la section de la variété V_3^6 de Segre, produit de trois ponctuelles, par une hypersurface d'ordre n. Les courbes canoniques sont déterminées sur cette surface par les hypersurfaces d'ordre $n-2$.

7. Nous allons calculer les genres de la surface qui vient d'être rencontrée.

Appelons A, B, C respectivement les points $x_0 = y_1 = z_1 = 0$, $x_0 = z_1 = x_1 = 0$, $x_0 = x_1 = y_1 = 0$ et considérons une surface φ d'ordre $3n$ ayant la multiplicité $2n$ en chacun de ces points.

Un plan passant par AB coupe φ suivant une courbe d'ordre $3n$ ayant en A, B les multiplicités $2n$; elle se décompose donc en la droite AB comptée n fois et une courbe d'ordre $2n$ ayant la multiplicité n en A, B. Il en résulte que la surface φ passe n fois par les droites BC, CA, AB.

Le nombre des coefficients figurant dans l'équation de φ est

$$\binom{3n+3}{3} - 3\binom{2n+2}{3} = \frac{1}{2}(n+1)(n^2+5n+2).$$

Les adjointes à la surface F_1 rencontrées plus haut sont les surfaces φ d'ordre $n-2$; on a donc

$$p_a = p_g = \frac{1}{2}(n-1)(n^2+n-4).$$

D'autre part, on a

$$p^{(1)} = 6n(n-2)^2 + 1 .$$

Liège, le 31 octobre 1950.