Extrait du *Bulletin de l'Académie royale de Belgique* (Classe des Sciences)
Séance du 2 avril 1949.

GÉOMÉTRIE ALGÉBRIQUE

Sur les points de diramation isolés des surfaces multiples,

par Lucien GODEAUX,
Membre de l'Académie.

(*Troisième note*).

Avant d'aborder le cas général où le point A_1' est double pour la surface Φ_1, nous étudierons un exemple présentant la particularité suivante : sur la surface Φ_1, le point de diramation A' de la surface Φ est équivalent à l'ensemble de deux droites σ_1, τ et d'une quartique σ_a ; le point A_1', commun aux courbes τ, σ_a est double conique et le point commun aux droites σ_1, τ est également double conique pour la surface (¹).

21. Considérons, sur la surface F, une involution cyclique I_{61} d'ordre $p = 61$ et supposons que pour le point uni A que nous considérons, nous ayons $\alpha = 14$. Nous avons $\beta = 48$, $\alpha\beta - 1 = 11 \times 61$.

Les premières valeurs de λ, μ sont :

$$\lambda_1 = 5,\ \mu_1 = 4\ ;\ \lambda_2 = 1,\ \mu_2 = 13\ ;\ \lambda_3 = 10,\ \mu_3 = 8\ ;\ \lambda_4 = 19,$$
$$\mu_4 = 3\ ;\ \lambda_5 = 6,\ \mu_5 = 17.$$

Les courbes C_0' ont en A la multiplicité 9 et passent par $\beta - 1 = 47$ points $A_{11}, A_{12}, \ldots, A_{1,47}$ infiniment voisins successifs de A, le premier étant sur a_1, et par $\alpha - 1 = 13$ points $A_{a1}, A_{a2}, \ldots, A_{a,13}$ infiniment voisins successifs de A, le premier étant sur a_a.

Nous avons

$$\lambda_1 + \alpha\mu_1 = 5 + 4.14 = 61, \qquad \mu_1 + \beta\lambda_1 = 4 + 5.48 = 4.61,$$

(¹) Les deux premières notes ont paru dans le BULLETIN DE L'ACADÉMIE, 1949, pp. 15-30, 270-284.

par conséquent les courbes C'_0 passent quatre fois par les points $A_{a1}, A_{a2}, \ldots, A_{a,13}$, mais sur chacune de ces courbes, le point A est l'origine de branches superlinéaires tangentes à a_1.

Le point $A_{1,47}$ est au moins simple pour les courbes C'_0 et la somme des multiplicités des points $A_{11}, A_{12}, \ldots, A_{1,47}$ pour ces courbes est égale à $61 - 9 = 52$. Les cas suivants peuvent se présenter :

a) A_{11} est quintuple, A_{12} est double et les autres points sont simples ;

b) A_{11} est quadruple, A_{12} triple et les autres points sont simples ;

c) A_{11} et A_{12} sont triples, A_{13} est double et les autres points simples ;

d) A_{11} est triple, A_{12}, A_{13}, A_{14} sont doubles et les autres points sont simples.

Dans le second cas, au point simple A_{13} devraient être infiniment voisins, dans des directions différentes, deux points simples A_{14} et A_{131}, ce qui est absurde.

Dans le troisième cas, au point triple A_{11} devraient être infiniment voisins dans des directions différentes un point triple A_{12} et un point simple ou double A_{111}, ce qui est impossible.

Le quatrième cas s'élimine de la même manière en considérant le point A_{15}.

Il en résulte que le premier cas se présente. Au point A_{12} sont infiniment voisins successifs trois points simples $A_{11,1}, A_{11,2}, A_{11,3}$.

En rapportant projectivement les courbes C'_0 aux hyperplans d'un espace de même dimension que $|C'_0|$, on obtient la surface Φ_1 (à une homographie près). Aux points $A_{1,47}, A_{11,3}, A_{a,13}$ correspondent respectivement une droite σ_1, une droite τ et une quartique rationnelle σ_a.

Dans l'intersection de deux courbes C'_0, le point A absorbe 6.61 points, donc la surface Φ_1 est d'ordre $n - 6$, ce qui est évident, puisque le point de diramation A', homologue de A, est sextuple pour la surface Φ.

Les sections hyperplanes Γ'_0 de Φ_1 sont de genre $\pi - 5$, ce que confirme la formule de Zeuthen appliquée à la correspondance entre une courbe Γ'_0 et la courbe C'_0 homologue.

22. Les courbes C_0'' ont en A la multiplicité 14, une tangente étant confondue avec a_1 et 13 avec a_α. Ces courbes passent simplement par A_{11}, A_{12}, ..., $A_{1,47}$. Elles ne peuvent d'autre part passer quatre fois par $A_{\alpha,13}$, car alors, elles seraient rencontrées par les courbes C_α en plus de 61 points confondus en A. On en conclut que le point A_0' appartient à τ et à σ_α et que les courbes C_0'' passent trois fois par le point $A_{\alpha,13}$. Les multiplicités des points $A_{\alpha 1}, A_{\alpha 2}, \ldots$, $A_{\alpha,13}$ pour les courbes C_0'' ont pour somme $61 - 14 = 47$; la multiplicité de $A_{\alpha 1}$ est donc au plus égale à 11 et les courbes C_0'' passent certainement par un point uni $A_{\alpha 1,1}$ infiniment voisin de $A_{\alpha 1}$.

Si $A_{\alpha 1}$ est multiple d'ordre 11 pour les courbes C_0'', $A_{\alpha 2}$ est triple, $A_{\alpha 1,1}$ est double et à ce point sont infiniment voisins trois points doubles $A_{\alpha 1,1,1}$, $A_{\alpha 1,1,2}$, $A_{\alpha 1,1,3}$.

Si le point $A_{\alpha 1}$ a une multiplicité inférieure à 11 (et au moins égale à 4), soit $A_{\alpha,x}$ le premier point triple de la suite considérée. Le point $A_{\alpha,x-1}$ a une multiplicité au moins égale à 4 et le point $A_{\alpha,x,1}$, infiniment voisin de $A_{\alpha,x}$, est au moins simple pour les courbes C_0''. Mais ceci est impossible, puisque $A_{\alpha,x+1}$ est triple pour ces courbes.

Cela étant, projetons Φ_1 du point A_1' sur un hyperplan de l'espace ambiant ; nous obtenons une surface Φ_2 dont les sections hyperplanes Γ_0'' correspondent aux courbes C_0''. Au domaine du point $A_{\alpha 1,1,3}$ correspond, sur Φ_2 une conique ρ_0, représentant le domaine du point A_1', qui est double conique pour Φ_1. A la droite σ_1 de Φ_1 correspond sur Φ_2 une droite σ_1 ; à la droite τ correspond un point singulier de Φ_2 situé sur σ_1 et sur ρ_0 ; à la quartique σ_α correspond une cubique gauche σ_α rencontrant ρ_0.

La surface Φ_2 est d'ordre $n - 8$ et ses sections hyperplanes Γ_0'' sont de genre $\pi - 6$.

23. Les courbes C_0''' ont en A la multiplicité 18, 10 tangentes étant confondues avec a_1 et 8 avec a_α. A ces courbes correspondent sur Φ_2 les sections Γ_0''' par les hyperplans passant par un point A_2'.

Si le point A_2' n'appartenait pas à ρ_0, les points $A_{\alpha 1,1}$, $A_{\alpha 1,1,1}$, $A_{\alpha 1,1,2}$, $A_{\alpha 1,1,3}$ seraient doubles pour les courbes C_0''' et le point $A_{\alpha 1}$ serait au moins multiple d'ordre 10, car les courbes C_0''' passent au moins deux fois par $A_{\alpha 2}$. Cette conclusion est absurde, car A_{a1} est au plus multiple d'ordre 8 pour les courbes C_0''''. Il en résulte que A' appartient à ρ_0 et que les points $A_{a1,1,1}$, ..., $A_{a1,13}$ sont simples pour les courbes C_0''''. Le point A_{a1} est donc au moins sextuple pour ces courbes.

Si le point A_{a2} étant double pour les courbes C_0'''', il en serait de même des points A_{a3}, ..., A_{a13}. Mais alors, les courbes C_a rencontreraient les courbes C_0'''' en moins de 61 points confondus en A. Il en résulte que les courbes C_0'''' passent sept fois par A_{a1} et trois fois par A_{a2}, ..., $A_{a,13}$. Le point A_2' n'appartient pas à la courbe σ_a.

Si le point A_1' n'appartenait pas à σ_1, les points A_{11}, ..., $A_{1,47}$ seraient au moins simples pour les courbes C_0'''' et celles-ci rencontreraient les courbes C_1 en 65 points au moins confondus en A, ce qui est impossible. Donc le point A_2' appartient à σ_1, c'est-à-dire se confond avec le point singulier qui représente la courbe τ.

Le point A_2' étant singulier pour Φ_2 et se confondant avec le point qui représente τ, les courbes C_0'''' passent au moins deux fois par $A_{21,3}$. Elles ne peuvent passer plus de deux fois par ce point, car alors elles passeraient au moins 3 fois par $A_{21,2}$, $A_{21,1}$ et par conséquent au moins 12 fois par A_{11}, ce qui est impossible, puisque les courbes C_0'''' ont 10 tangentes en A confondues avec a_1. D'autre part, le point A_{13} est au moins double pour les courbes C_0'''' et le dernier point de la suite A_{13}, A_{14}, ... qui appartient à ces courbes a la multiplicité du précédent diminuée d'une unité. On en conclut facilement que les courbes C_0'''' passent 10 fois par A_{11}, 4 fois par A_{12}, 2 fois par 14 points A_{13}, A_{14}, ..., $A_{1,16}$, une fois par $A_{1,17}$, une fois par un point $A_{1,17,1}$ infiniment voisin de $A_{1,12}$, enfin deux fois par les points $A_{12,1}$, $A_{12,2}$, $A_{12,3}$.

En projetant Φ_2 de A_2' sur un hyperplan de l'espace ambiant, on obtient une surface Φ_3 dont les sections hyperplanes Γ_0'''' correspondent aux courbes C_0''''. A σ_1 correspond un point singulier de Φ_3, au domaine du point $A_{1,17,1}$ correspond une droite τ_1. Les courbes τ, ρ_0, σ_a sont respectivement sur Φ_3 une conique, une droite et une cubique gauche.

Le point A absorbe 11×61 points dans l'intersection de deux courbes C_0'''', donc la surface Φ_3 est d'ordre $n - 11$. En utilisant la formule de Zeuthen, on voit que les courbes Γ_0'''' sont de genre $\pi - 8$.

24. Les courbes $C_0^{(4)}$ ont la multiplicité 22 en A et y ont 19 tangentes confondues avec a_1, 3 avec a_α. A ces courbes correspondent sur Φ_3 les sections $\Gamma_0^{(4)}$ par les hyperplans passant par un point A_3'.

Le point $A_{\alpha 1}$ a au plus la multiplicité 3 pour les courbes $C_0^{(4)}$ et ces courbes passent certainement par le point $A_{\alpha 2}$, donc elles ne peuvent passer par les points $A_{\alpha 1,1}$, $A_{\alpha 1,1,1}$, $A_{\alpha 1,1,2}$, $A_{\alpha 1,1,2}$. En d'autres termes, le point A_3' appartient à ρ_0. D'autre part, puisque les courbes C_0 doivent rencontrer les courbes C_α en 61 points confondus en A, ces premières courbes doivent passer 3 fois par chacun des points $A_{\alpha 1}$, $A_{\alpha 2}$, ..., $A_{\alpha,13}$. Le point A_3' ne peut donc appartenir à σ_α.

Le point A_3' doit nécessairement appartenir à τ et les courbes $C_0^{(4)}$ passent 7 fois par A_{11}, 3 fois par A_{12}, deux fois par les 14 points A_{13}, A_{14}, ..., $A_{1,16}$, une fois par $A_{1,17}$, une fois par 12 points $A_{11,1}$, $A_{11,2}$, ..., $A_{11,12}$ infiniment voisins successifs de A_{11}, une fois par les trois points $A_{12,1}$, $A_{12,2}$, $A_{12,3}$, enfin une fois par le point $A_{1,17,1}$.

En projetant Φ_3 de A_3' sur un hyperplan, on obtient une surface Φ_4 dont les sections hyperplanes sont les courbes $\Gamma_0^{(4)}$. Sur cette surface, les courbes τ_1, τ, σ_α sont respectivement une droite, une droite et une cubique gauche. A la droite σ_1 correspond un point singulier situé sur la droite τ_1, à la courbe ρ_0 correspond un point singulier situé sur la cubique gauche σ_α. Au domaine du point $A_{11,12}$ correspond sur Φ_4 une droite exceptionnelle passant par le point qui représente ρ_0 et s'appuyant sur la droite τ. Les droites τ_1 et τ se rencontrent en un point.

La surface Φ_4 est d'ordre $n - 12$ et ses sections hyperplanes sont de genre $\pi - 8$.

25. Les courbes $C_0^{(5)}$ passent 23 fois par A et 6 de leurs tangentes en ce point sont confondues avec a_1, les 17 autres avec a_α. Il leur correspond sur la surface Φ_4 les sections par les hyperplans passant par un point A_4' ; nous désignerons ces sections par la notation $\Gamma_0^{(5)}$.

Le point A_4' appartient à la courbe σ_α, car autrement les courbes $C_0^{(5)}$ et les courbes C_α se rencontreraient en plus de 61 points confondus en A. Pour la même raison, le point A_4' appartient à la droite exceptionnelle qui correspond au point A_3' de Φ_3.

On voit aisément que les courbes $C_0^{(5)}$ passent 14 fois par A_{a1}, deux fois par $A_{a2}, \ldots, A_{a,13}$, trois fois par $A_{a1,1}$, $A_{a1,1,1}$, $A_{a1,1,2}$, $A_{a1,1,3}$, 6 fois par A_{11}, 3 fois par A_{12}, deux fois par $A_{13}, \ldots, A_{1,16}$, une fois par les points $A_{12,1}$, $A_{12,2}$, $A_{12,3}$, $A_{1,17}$ et $A_{1,17,1}$.

La surface Φ_5, obtenue en projetant Φ_4 du point A_4' sur un hyperplan et dont les sections hyperplanes sont les courbes $\Gamma_0^{(5)}$, a l'ordre $n - 15$ et les courbes $\Gamma_0^{(5)}$ ont le genre $\pi - 10$. Le point A_4' est triple conique pour la surface Φ_4.

Sur la surface Φ_5, la courbe σ_1 se réduit à un point singulier, la courbe τ_1 est une droite passant par le point précédent, la courbe τ est une droite s'appuyant sur τ_1, ρ_0 est une cubique gauche s'appuyant sur τ et enfin σa est une conique s'appuyant sur ρ_0.

26. On a $\lambda_6 = 15$, $\mu_6 = 12$ et les courbes $C_0^{(6)}$ ont en A la multiplicité 27 ; 15 tangentes en A sont confondues avec a_1 et 12 avec a_a.

Aux courbes $C_0^{(6)}$ correspondent un Φ_5 les courbes $\Gamma_0^{(6)}$ découpées par les hyperplans passant par un point A_1'. Celu-ci appartient à la courbe ρ_0 et à la droite τ.

Les courbes $C_0^{(6)}$ passent 10 fois par A_{a1}, deux fois par $A_{a2}, \ldots, A_{a,13}$, deux fois par $A_{a1,1}$, $A_{a1,1,1}$, $A_{a1,1,2}$, $A_{a1,1,3}$, 3 fois par A_{11}, deux fois par $A_{12}, \ldots, A_{1,16}$, une fois par $A_{1,17}$ et $A_{1,17,1}$, une fois par $A_{11,1}$, $A_{11,2}, \ldots, A_{11,12}$.

Sur la surface Φ_5, obtenue en projetant Φ_5 de A_5' sur un hyperplan de l'espace ambiant, la courbe σ_1 est représentée par un point singulier, τ_1 par une droite passant par ce point, ρ_0 par une conique, σ_a par une conique, τ par un point singulier situé à l'intersection de τ_1 et de la droite exceptionnelle qui correspond au point A_5' ; cette droite s'appuie sur ρ_0.

La surface Φ_5 est d'ordre $n - 16$ et ses sections hyperplanes sont de genre $\pi - 10$.

Observons encore que les courbes $C_0^{(30)}$ sont données par $\lambda_{30} = 13$, $\mu_{30} = 47$. Les courbes $C_0^{(30)}$ passent 60 fois par A, une fois par A_{11}, $A_{11,1}, \ldots, A_{11,12}$, une fois par A_{a1} et par une suite de 46 points infiniment voisins successifs de A_{a1}.

27. Les courbes Γ_0' satisfont à l'équation fonctionnelle

$$\Gamma_0 \equiv \Gamma_0' + \sigma_1 + \tau_1 + \tau_2 + \rho_0 + \sigma_a,$$

où nous écrivons τ_2 au lieu de τ pour uniformiser les notations.

Les courbes σ_1, τ_1, τ_2, ρ_0, σ_a ont respectivement les degrés virtuels — 2, — 2, — 3, — 2, — 5. Les courbes Γ_0' ne rencontrent pas les courbes τ_1 et ρ_0.

Parmi les courbes Γ_0', il en est de particulières qui rencontrent la courbe σ_1 en cinq points ; elles sont données par

$$\Gamma_0' - 3\sigma_1 - 2\tau_1 - \tau_2.$$

Les courbes Γ_0'' satisfont à l'équation fonctionnelle

$$\Gamma_0 \equiv \Gamma_0'' + \sigma_1 + \tau_1 + \tau_2 + 2\rho_0 + \sigma_a,$$

Parmi les courbes Γ_0'', il en est de particulières qui rencontrent la courbe σ_a en 13 points ; elles sont données par

$$\Gamma_0'' - \sigma_a.$$

Les courbes Γ_0''' donnent

$$\Gamma_0 \equiv \Gamma_0''' + \sigma_1 + 2\tau_1 + 2\tau_2 + 2\rho_0 + \sigma_a.$$

Les courbes Γ_0'''' particulières qui rencontrent σ_1 en 10 points et celles qui rencontrent σ_a en 8 points sont respectivement données par

$$\Gamma_0'''' - 6\sigma_1 - 2\tau_1, \qquad \Gamma_0'''' - \sigma_a.$$

Les courbes $\Gamma_0^{(4)}$ satisfont à la même équation fonctionnelle que les courbes Γ_0'''', cat $| \Gamma_0^{(4)} |$ ne diffère de $| \Gamma_0''' |$ que par l'imposition du point-base simple A_3' sur la surface Φ_3.

On a enfin

$$\Gamma_0 \equiv \Gamma_0^{(5)} + \sigma_1 + 2\tau_1 + 2\tau_2 + 3\rho_0 + \sigma_a ;$$

les courbes $\Gamma_0^{(6)}$ satisfont à la même relation fonctionnelle, car $| \Gamma_0^{(6)} |$ ne diffère de $| \Gamma_0^5 |$ que par l'imposition d'un point-base simple A_5' sur Φ_5.

Sur la surface Φ_2, le point A_2' est triple et le cône tangent à cette surface en ce point se décompose en un plan et en un cône quadratique se rencontrant suivant une droite. Ce plan et ce cône s'obtiennent en projetant la droite τ_1 et la conique τ_2 de Φ_3 à partir de A_2'. Appelons (τ_0) et (τ_2) les droite et conique infiniment petites, infiniment voisines de A_2' dans ce plan et dans ce cône.

Lorsque l'on passe de Φ_1 à Φ_2 par projection à partir de A_1', la droite (τ_1) est la projection d'une conique infiniment petite, infiniment voisine du point commun à σ_1, τ_2, conique qui s'appuie sur la droite τ_2. La conique (τ_2) est la projection, à partir de A_1', des points de τ_1 infiniment voisins de la droite τ_2. On en conclut que :

Le point de diramation A' *est sextuple pour la surface* Φ. *Le cône tangent en ce point se décompose en deux plans* $\bar{\sigma}_1$, $\bar{\tau}_2$ *et en un cône rationnel du quatrième ordre* $\bar{\sigma}_a$. *Le plan* τ_2 *rencontre le cône* $\bar{\sigma}_a$ *suivant une droite portant un point double conique infiniment voisin de* A'. *Les deux plans se rencontrent suivant une droite portant également un point double conique infiniment voisin de* A'. *Le plan* $\bar{\sigma}_1$ *et le cône* $\bar{\sigma}_a$ *ne se rencontrent pas.*

Observons que nous avons

$$\Gamma_0'''' + \tau_1 + \tau_2 \equiv \Gamma_0''.$$

Le degré de $|\, \Gamma_0'' \,|$ est $n - 8$, celui de $|\, \Gamma_0'''' \,|$ est $n - 11$. D'après la relation fonctionnelle précédente, on doit avoir

$$n - 11 + (-2) + (-3) + 2 + 4 + 2 = n - 8,$$

ce qui vérifie que les courbes τ_1, τ_2 ont bien pour degrés virtuels respectifs -2 et -3.

Liège, le 28 mars 1949.