Extrait du *Bulletin de la Société royale des Sciences de Liége*
Séance du 17 juin 1948. — N° 6.

Sur les surfaces irrégulières contenant un système linéaire isolé,

par Lucien GODEAUX, Membre de la Société.

On sait qu'un système linéaire $|C|$, de genre $\pi \geq q$, tracé sur une surface F d'irrégularité q, appartient en général à un système continu algébrique $\{C\}$, formé de ∞^q systèmes linéaires. Une surface d'irrégularité q peut cependant contenir des systèmes continus formés de $\infty^{q'}$ systèmes linéaires, où $q' < q$, et même des systèmes linéaires isolés. Un exemple de cette dernière alternative est fourni par la surface qui représente les couples de points d'une courbe de genre quatre. Une courbe de genre quatre contient en effet deux séries linéaires g_3^1, d'ordre trois et de dimension un. A ces séries correspondent, sur la surface qui représente les couples de points de la courbe, deux courbes isolées de genre quatre, c'est-à-dire deux systèmes linéaires isolés de dimension zéro. On parvient d'ailleurs à une conclusion analogue lorsque l'on considère la surface qui représente les couples de points d'une courbe contenant une série linéaire d'ordre inférieur au genre de la courbe.

Dans cette note, nous nous proposons d'établir une propriété d'une surface irrégulière contenant un système linéaire isolé, à savoir que la variété de Picard d'une telle surface est en général tracée sur une variété de Jacobi.

1. Soit F une surface algébrique d'irrégularité $q > 0$, contenant un système linéaire $|C|$, isolé, de courbes de genre $\pi \geq q$. Nous supposerons que F est dépourvue de faisceau irrationnel de courbes.

Considérons, sur la surface F, un système régulier $|D|$; ce système appartient à un système algébrique continu, $\{D\}$, formé de ∞^q systèmes linéaires analogues à $|D|$. Ces systèmes ont en général la même dimension que $|D|$.

On sait qu'entre les systèmes linéaires $|D|$ du système continu $\{D\}$, il existe un groupe transitif, ∞^q, de transformations birationnelles (1). Si $|D_1|$, $|D_1'|$ sont deux systèmes linéaires distincts

(1) G. Castelnuovo, *Rend. Accad. Lincei*, 1905.

de $\{D\}$, une de ces transformations, faisant correspondre $|D'_1|$ à $|D_1|$, est définie par

$$|D'| = |D'_1 - D_1 + D|$$

et fait correspondre à $|D|$ le système $|D'|$.

Supposons que le système linéaire général de $\{D\}$ contienne le système linéaire $|C|$. Cela signifie que la dimension du système linéaire général de $\{D\}$ est supérieure à celle de la série linéaire découpée par ses courbes sur une courbe C générale. Il en sera de même des séries découpées sur une courbe C par tous les systèmes linéaires de $\{D\}$. Représentons par $|E|$ le système $|D - C|$. Le système $|E|$ appartiendra à un système continu de dimension q. On pourra définir les transformations

$$|E'| = |E'_1 - E_1 + E|,$$

qui ne seront autres que les transformations

$$|E'| = |D'_1 - D_1 + E|.$$

En continuant de même, on pourra construire sur F un système continu formé de ∞^q systèmes linéaires, dont le système linéaire général ne contient pas $|C|$ comme partie.

2. Supposons que nous ayons construit, sur F, un système continu $\{G\}$, formé de ∞^q systèmes linéaires $|G|$, dont le système général ne contient pas $|C|$ comme partie. Soit m le nombre de points communs à une courbe G et à une courbe C.

Sur une courbe générale de $|C|$, les systèmes linéaires $|G|$ découpent des séries linéaires g_m, en général incomplètes.

Soient W la variété de Jacobi (à π dimensions) attachée à la courbe C considérée et V la variété de Picard (à q dimensions) attachée à la surface F.

La variété W′ qui représente l'ensemble des séries linéaires d'ordre m appartenant à la courbe C est une variété tracée sur W et qui coïncide d'ailleurs avec W si $m \geq \pi$. La variété W″ qui représente les séries linéaires d'ordre m appartenant à C et découpées sur cette courbe par les systèmes linéaires $|G|$ de $\{G\}$ est tracée sur W′.

Si les systèmes $|G|$ découpent des séries linéaires distinctes sur la courbe C, la variété de Picard V coïncide avec W″ et est donc tracée sur la variété de Jacobi W.

Supposons que la variété W″ ait la dimension $q' < q$. Il y a alors $\infty^{q-q'}$ systèmes linéaires de $\{G\}$ découpant sur la courbe C la même série linéaire A ces systèmes correspondent, sur V, les points d'une variété V' à $q-q'$ dimensions et on a, sur V, $\infty^{q'}$ variétés analogues, ne se rencontrant pas deux à deux et formant une congruence linéaire. Cette congruence $\{V'\}$ est en correspondance birationnelle avec la variété W''.

On peut également faire l'hypothèse que la série linéaire découpée sur C par un système linéaire de $\{G\}$ est également découpée par un nombre fini d'autres systèmes linéaires de $\{G\}$. En d'autres termes, chacune des séries linéaires g_m de C représentée par un point de W'' est découpée par un nombre fini α de systèmes linéaires de $\{G\}$. Il existe alors une correspondance $(1, \alpha)$ entre les points de W'' et ceux de V. Cette dernière variété contient une involution d'ordre α ayant pour image la variété W''.

3. Reprenons la seconde hypothèse, où il y a $\infty^{q-q'}$ systèmes linéaires de $\{G\}$ découpant sur C la même série linéaire g_m. Par un groupe de cette série passent au moins $\infty^{q-q'}$ courbes G n'appartenant pas à un même système linéaire et il y a donc $\infty^{q-q'-1}$ de ces courbes contenant la courbe C comme partie. On en conclut que dans $\{G\}$, il y a ∞^{q-1} systèmes linéaires contenant la courbe C comme partie. Désignons par Ω la variété, à $q-1$ dimensions, représentant ces systèmes sur V.

Soient $|G_1|$, $|G'_1|$, $|G|$ trois systèmes linéaires de $\{G\}$ découpant sur C la même série linéaire g_m.

Considérons le système linéaire

$$|G'| = |G'_1 - G_1 + G|.$$

Les points qui représentent $|G_1|$, $|G'_1|$, $|G|$ sur V appartiennent à une même variété V'. Supposons que le point qui représente $|G'|$ appartienne à une autre variété V', soit V'_1. Lorsque $|G|$ varie de telle sorte que ce système soit toujours représenté par un point de V', le point représentatif de $|G'|$ décrit V'_1. Lorsque $|G|$ tend vers $|G_1|$, $|G'|$ tend vers $|G'_1|$. Mais alors, V' et V'_1 auraient un point commun, ce qui est impossible. Donc, $|G'|$ découpe sur C la même série linéaire g_m que $|G|$, $|G_1|$, $|G'_1|$. On en conclut que les variétés V' sont des variétés abéliennes.

La variété V contient donc une congruence linéaire $\{V'\}$, $\infty^{q'}$, de variétés abéliennes. D'après M. Castelnuovo (*loc. cit,*), V contient une seconde congruence linéaire, $\{V''\}$, $\infty^{q-q'}$, de variétés abéliennes V'' à q' dimensions. Les variétés V', V'' sont unisécantes et les variétés V'' sont donc birationnellement identiques à W''.

Désignons par $|H|$ les systèmes linéaires $|G - C|$. Nous obtenons un système algébrique continu ∞^{q-1}, $\{H\}$, de systèmes $|H|$ et il est facile ne voir que Ω, qui représente ces systèmes $|H|$, est une variété abélienne. Sur Ω, les variétés V' découpent des variétés (Ω, V'), abéliennes, à $q - q' - 1$ dimensions, formant une congruence linéaire $\{(\Omega, V')\}$ à q' dimensions. Il existe donc, sur Ω, une congruence linéaire $\infty^{q-q'-1}$, de variétés abéliennes à q' dimensions, qui appartiennent d'ailleurs à la congruence $\{V''\}$ rencontrée plus haut.

En résumé :

Si une surface algébrique F, *d'irrégularité* q >1, *pourvue de faisceau irrationnel de courbes, contient un système linéaire isolé, sa variété de Picard* V *est :* dé

1° *tracée sur une variété de Jacobi* (cas général) ;

2° *contient une congruence linéaire de variétés abéliennes, birationnellement équivalente à une variété tracée sur une variété de Jacobi ;*

3° *contient une involution ayant pour image une variété tracée sur une variété de Jacobi.*

4. Nos raisonnements ne font aucune hypothèse sur la dimension du système linéaire $|C|$. Si ce système était au moins simplement infini, on pourrait faire usage des critères d'équivalence de M. Severi.

C'est une question sur laquelle nous espérons revenir.

Prague, 8 mai 1948.

Imprimerie M. HAYEZ, rue de Louvain, 112, Bruxelles
(Domicile légal : rue de la Chancellerie, 4)