Extrait du *Bulletin de la Société royale des Sciences de Liége*
Séance du 15 avril 1948. — N° 4.

Sur la structure des points unis des involutions cycliques appartenant à une surface algébrique. Étude d'un exemple,

par Lucien GODEAUX, Membre de la Société.

Nous nous proposons, dans cette note, d'appliquer les méthodes que nous avons fait connaître récemment [1] pour l'étude des points unis des involutions cycliques appartenant à une surface algébrique, à un cas particulier, de manière à pouvoir pousser l'étude jusqu'au bout. Cette application nous paraît de nature à éclairer les méthodes en question.

1. Soit F une surface algébrique contenant une involution I_{19}, d'ordre 19, ne présentant qu'un nombre fini de points unis. Nous prendrons comme modèle projectif de la surface F une surface d'ordre $19n$, appartenant à un espace linéaire S_r à r dimensions, sur laquelle l'involution est déterminée par une homographie H cyclique de période 19. Nous désignerons par

[1] Recherches sur les points unis isolés des involutions cycliques appartenant à une surface algébrique (*Bull. Acad. roy. de Belgique*, 1948, pp. 206-228, 299-311); Sur la structure des points unis isolés des involutions cycliques appartenant à une surface algébrique (*Bull. de la Soc. roy. des Sc. de Liège*, 1948, pp. 116-127).

$S^{(0)}$, $S^{(1)}$, ..., $S^{(18)}$ les axes ponctuels de l'homographie H et nous supposerons que seul, le premier rencontre la surface F.

Le système des sections hyperplanes de la surface F sera désigné par $|C|$. Il existe dans ce système 19 systèmes linéaires partiels $|C_0|$, $|C_1|$, ..., $|C_{18}|$ appartenant à l'involution I_{19}, le système $|C_i|$ étant découpé par les hyperplans passant par les espaces $S^{(0)}$, $S^{(1)}$, ..., $S^{(i-1)}$, $S^{(i+1)}$, ..., $S^{(18)}$. Le système $|C_0|$ est dépourvu de points-base. En rapportant projectivement les courbes C_0 aux hypreplans d'un espace linéaire ayant le même nombre de dimensions que $S^{(0)}$ ou $|C_0|$, on obtient une surface Φ, normale, d'ordre n, image de l'involution I_{19}. Nous désignerons par Γ_0 les sections hyperplanes de Φ et par π leur genre. Le genre des courbes C est alors égal à $19\pi - 18$.

Ces hypothèses, comme nous l'avons montré dans nos travaux antérieurs, n'ont rien de restrictif (2).

Soit A un point uni de l'involution I_{19}, appartenant par conséquent à l'espace $S^{(0)}$. Nous supposerons que le plan tangent à F en A, qui est uni pour l'homographie H, s'appuie en un point sur l'axe $S^{(1)}$ et en un point sur l'axe $S^{(8)}$. Dans ces conditions, les courbes C_1 ont un point simple en A et sont tangentes en ce point à la droite a_8 passant par A et par le point de rencontre de $S^{(8)}$ et du plan tangent à F en A. De même, les courbes C_8 passent simplement par A en y touchant la droite tangente à F en A, s'appuyant sur $S^{(1)}$.

2. Aux axes ponctuels de l'homographie H, ou encore à chacun des systèmes $|C_0|$, $|C_1|$, ..., $|C_{18}|$, nous avons attaché une racine de l'unité. Si ε est une racine primitive d'ordre 19 de l'unité, ces racines sont respectivement 1, ε, ε^2, ..., ε^{18}.

Désignons par C_0' les courbes C_0 passant par A, par C_0'' les courbes C_0' assujetties à toucher en A une droite distincte de a_1, a_8, et ainsi de suite. Nous parviendrons finalement à un système de courbes ayant en A un point multiple d'ordre 19 à tangentes variables. Les courbes C_0', C_0'' ... dont la multiplicité en A est inférieure à 19, ont leurs tangentes confondues avec a_1 et a_8.

Comme nous l'avons montré, les courbes C_0', C_0'' ... ont le

(2) Voir, par exemple, notre exposé sur : Les involutions cycliques appartenant à une surface algébrique (*Actualités scient.*, n° 270, Paris, Hermann, 1935).

même comportement en A que les courbes $\lambda C_1 + \mu C_8$, où λ, μ sont des entiers positifs ou nuls satisfaisant aux conditions

$$\lambda + \mu \leqslant 19, \qquad \lambda + 8\mu \equiv 0, \qquad (\text{mod. } 19).$$

Ces courbes ont la multiplicité $\lambda + \mu$ en A, λ tangentes étant confondues avec a_8 et μ avec a_1; nous les représenterons par le symbole (λ, μ). Il est alors facile de déterminer le comportement en A des courbes C_0', C_0'' ...; on obtient précisément

$$C_0' : (3, 2), C_0'' : (1, 7), C_0''' : (6, 4), C_0^{(4)} : (11, 1), C_0^{(5)} : (4, 9),$$
$$C_0^{(6)} : (9, 6). C_0^{(7)} : (2, 14), C_0^{(8)} : (14, 3), C_0^{(9)} : (7, 11).$$

Les courbes $C_0^{(10)}$ auront en A un point multiple d'ordre 19, à tangentes variables.

Les courbes C_1, C_8 doivent rencontrer les courbes C_0', C_0'' ... en 19 points confondus en A. Les points fixes infiniment voisins de A communs à ces courbes sont évidemment unis pour l'involution I_{19}.

3. Commençons par nous occuper des courbes C_0', qui ont un point quintuple en A, deux tangentes étant confondues avec a_1 et trois avec a_8.

Les courbes C_0', et les courbes C_8 doivent avoir en commun sept points infiniment voisins successifs de A, doubles pour les courbes C_0'. Nous désignerons ces points par A_1, A_2, ..., A_7. Ces points sont unis pour l'involution et le dernier seul est uni parfait.

Les courbes C_0' et les courbes C_1 ont en commun un certain nombre de points B_1, B_2, ... infiniment voisins successifs de A. La somme des multiplicités de ces points pour les courbes C_0' doit être égale à $19 - 5 = 14$. Les x premiers de ces points, B_1, B_2, ..., B_x, sont triples pour les courbes C_0', le suivant, B_{x+1}, est double et les $13 - x$ points successifs B_{x+2}, ... sont simples. Au point B_{x+1}, qui est nécessairement uni non parfait pour I_{19}, est infiniment voisin un point B', simple pour les courbes C_0', uni parfait.

Le point A absorbe $3 \times 19 + 13 + 6x$ intersections de deux courbes C_0' et ce nombre doit être multiple de 19. Il est facile de voir que l'on a $x = 1$. Les courbes C_0' et C_1 ont donc en commun un point B_1, triple pour les courbes C_0', un point B_2, double pour les courbes C_0', une suite de neuf points B_3, B_4, ..., B_{11}, simples pour les courbes C_0'. De plus, les courbes C_0' ont en commun un point simple, que nous désignerons par B_{21}, infiniment voisin de B_2. Les points B_{11} et B_{21} sont unis parfaits pour l'involution.

Soient Γ_0' les courbes qui correspondent sur Φ aux courbes C_0'; elles sont découpées sur cette surface par les hyperplans passant par le point de diramation A_0 homologue de A. En projetant Φ de A_0 sur un hyperplan de l'espace ambiant, on obtient une surface Φ_1, dont les sections hyperplanes Γ_0' correspondent projectivement aux courbes C_0'. Il en résulte que la surface Φ_1 est d'ordre $n-4$.

Au domaine du point A_7 correspond sur Φ_1 une conique α_2, au domaine du point B_{11} une droite β_1 et au domaine du point B_{21}, une droite β_1'. Le point A_0 est quadruple pour Φ, le cône tangent en ce point étant formé du cône du second ordre et des deux plans projetant de A_0 la conique α_2 et les droites β_1, β_1'.

Une courbe Γ'_0 doit être de genre $\pi-3$. La courbe C_0' homologue est de genre $19\pi-39$. Entre ces courbes, nous avons une correspondance (1, 19) présentant quatre points de diramation sur Γ_0'. La formule de Zeuthen. appliquée à cette correspondance, conduit à une identité.

4. Les courbes C_0'' ont en A la multiplicité 8, sept tangentes coïncidant avec a_1 et une avec a_8. Ces courbes passent nécessairement une fois pas chacun des points B_1, B_2, ..., B_{11}.

Appelons Γ_0'' les courbes qui correspondent sur Φ_1 aux courbes C_0''; elles sont découpées sur cette surface par les hyperplans passant par un point A_0'. Si le point A_0' n'appartenait pas à la conique α_2, les courbes Γ_0'' rencontreraient celle-ci en deux points et les courbes C_0'' auraient un point double en A_7. Mais alors, elles passeraient au moins deux fois par A_1, A_2, ..., A_6 et seraient rencontrées en plus de 19 points confondus en A par les courbes C_8. Donc le point A_0' appartient à la courbe α_2 et les courbes C_0'' passent une fois par A_7 et une fois au moins par A_1, A_2, ..., A_6.

La somme des multiplicités des points A_1, A_2, ..., A pour les courbes C_0'' est au plus égal à $19-8=11$, donc le point A_1 est au plus quintuple pour ces courbes. Le point A_1 est uni non parfait pour I_{19} et contient donc, dans son domaine du premier ordre, deux points unis parfaits : l'un est le point A_2; nous désignerons l'autre par A_{11}. Si le point A_1 est quintuple pour les courbes C_0'', comme il y a sept tangentes à ces courbes cononfdues avec a_1, le point A_{11} est double pour ces courbes. De plus, comme A_2 est simple pour les courbes C_0'' et ne peut avoir un point infiniment voisin distinct de A_3 commun à ces courbes, il existe un point A_{111}, double pour les courbes C_0'', infiniment voisin de A_{11}, ou deux points simples pour ces courbes, infiniment voisins successifs de A_{11}. En exprimant que le nombre de points d'intersection de deux courbes C_0'' absorbés en A est multiple de 19, on écarte la seconde hypothèse.

Si le point A_1 était quadruple pour les courbes C_0'', le point A_2 serait double et ces courbes auraient en commun soit un point double suivi de deux points simples, soit quatre points simples infiniment voisins successifs de A_1, et un point simple infiniment voisin de A_2. Mais dans aucun de ces cas, le nombre des intersections de deux courbes C_0'' absorbées en A ne serait multiple de 19. Il en serait de même si les courbes C_0'' avaient un point triple en A_1 et un point triple en A_2, ou si elles avaient un point triple en A_1 suivi de deux points doubles en A_2, A_3, ou enfin si elles avaient des points doubles en A_1, A_2, A_3, A_4. D'ailleurs, puisque la multiplicité de A_1 est inférieure à sept, celle de A_2 doit être inférieure à celle de A_1, car les courbes C_0'' passent nécessairement par A_{11}.

On en conclut que les courbes C_0'' passent cinq fois par A_1, une fois par A_2, A_3, ..., A_7, deux fois par A_{11} et deux fois par A_{111}. De plus, ce dernier point est uni parfait pour l'involution.

Deux courbes C_0'' ont 6×19 points d'intersection absorbés en A. Ces courbes sont de genre $19\pi - 58$. Les courbes Γ_0'' sont de genre $\pi - 4$ et par la formule de Zeuthen on vérifie qu'il n'y a pas contradiction.

En projetant Φ_1 de A_0' sur un hyperplan de l'espace ambiant, on obtient une surface Φ_2, d'ordre $n - 6$, dont les sections hyperplanes Γ_0'' correspondent projectivement aux courbes C_0''.

Aux domaines des points A_7, B_{11} correspondent sur Φ_2 des droites projections l'une de la conique α_2, l'autre de la droite β_1; nous désignerons ces droites par les mêmes symboles que les courbes dont elles sont les projections. Au domaine du point A_{111} correspond une conique α_2'. Le point A_0' est double pour la surface Φ_1, le cône tangent étant celui qui projette α_2'.

Les courbes Γ_0'' ne rencontrant pas la droite β_1, celle-ci est projetée en un point de Φ_2 et passe donc par A_0'.

5. Les courbes C_0''' passent dix fois par A et y ont quatre tangentes confondues avec a_1 et six avec a_8.

La somme des multiplicités des points B_1, B_2, ... pour les courbes C_0''' doit être égale à 9, par conséquent ces courbes ne peuvent passer par le point B_{11}. Si l'on désigne par Γ_0''' les courbes qu icorrespondent sur Φ_2 aux courbes C_0''', ces courbes Γ_0''' sont découpées sur la surface par les hyperplans passant par un point A_0'' de la droite β_1.

Supposons que la conique α_2' ne passe pas par le point A_0''. Alors, le point A_{111} est double pour les courbes C_0'''; le point A_{11} est au moins double et le point A_1 au moins quadruple. Mais les courbes C_0''' ayant quatre tangentes confondues avec a_1, le point A_1 est exactement quadruple et le point A_{11} double pour les courbes C_0'''. Mais alors, ces courbes ne peuvent passer par A_2 et les courbes C_8 coupent les courbes C_0''' en 14 points confondus en A, ce qui est impossible. Donc la courbe α_2' passe par A_0''.

Il en résulte que le point A_{111} est simple pour les courbes C_0'''. Le point A_1 étant au plus quadruple pour ces courbes, le point A_{11} est au plus double et les courbes passent simplement par A_2. Mais alors elles passent simplement par A_3, A_4, ..., A_7 et par conséquent ont un point triple en A_1, le point A_{11} étant simple. Sur la surface Φ_2, la droite α_2 ne passe pas par A_2''.

Supposons que les courbes C_0''' passent $x_1 \leqslant 6$ fois par B_1, x_2 fois par B_2, x_3 fois par B_3, ... On a

$$x_1 + x_2 + x_3 + \cdots = 9.$$

Si les courbes C_0''' ne passent pas par B_{21}, on a $x_2 = x_1$ et le nombre d'intersections d'une courbe C_0' et d'une courbe C_0''' absorbées en A est $4 \times 19 + 3x_1 + 1$. Ce nombre doit être multiple de 19 et l'on a $x_1 = 6$. Mais alors, comme $x_2 = x_1$, on a $x_1 + x_2 = 12$, ce qui est incompatible avec l'égalité précédente. Il faut donc que les courbes C_0''' passent par B_{21}. On a alors $x_2 < x_1$ et la multiplicité de B_{21} est $x_1 - x_2 - x_3$. Le nombre des points d'intersection des courbes C_0', C_0''' absorbés en A est alors $4 \times 19 + 3x_1 - x_3 + 1$. Le nombre $3x_1 - x_3 + 1$ doit être multiple de 19, ce qui n'est possible que si $x_1 = 6$, $x_3 = 0$. On a alors $x_2 = 3$ et les courbes C_0''' ont un point sextuple en B_1, des points triples en B_2 et B_{21}.

Le nombre d'intersection absorbées en A pour des courbes C_0''' est égal à 9×19.

Une courbe C_0''' est de genre $19\pi-87$. La courbe Γ_0''' correspondante possède cinq points de diramation et, par la formule de Zeuthen, elle est de genre $\pi-6$.

Si l'on projette Φ_2 de A_0'' sur un hyperplan, on obtient une surface Φ_3, d'ordre $n-9$, dont les sections hyperplanes sont les courbes Γ_0'''. Le point A_0'' est donc triple pour la surface Φ_2. Le cône tangent à cette surface en ce point est le cône projetant la courbe B_1' qui, sur Φ_3, est une cubique gauche.

Il convient d'observer de plus près le passage de Φ_1 à Φ_2 et celui de Φ_2 à Φ_3. Sur Φ_1, nous avons une conique α_2 et deux droites β_1, β_1'. La droite β_1' coupe la conique α_2 en un point A_0' qui est double conique pour la surface. On passe de Φ_1 à Φ_2 par projection à partir de A_0', ce qui donne naissance à la conique α_2'. La conique α_2 donne une droite; la droite β_1 donne une droite; par contre la droite β_1' donne un point isolé A_0'' que l'on voit ensuite être triple pour la surface Φ_2. Observons que la droite β_1 passant par A_0'' sur la surface Φ_1, les droites β_1, β_1' se rencontrent. Sur la surface Φ_3, il correspond un point à la droite β_1, point qui se trouve sur la cubique β_1'.

6. Les courbes $C_0^{(4)}$ ont un point multiple d'ordre 12 en A, une tangente confondue avec a_1 et 11 tangentes confondues a_8. On en conclut immédiatement que les courbes considérées passent simplement par les points $A_1, A_2, \ldots, A_7$.

Les courbes $\Gamma_0^{(4)}$ qui correspondent sur Φ_3 aux courbes $C_0^{(4)}$ sont découpées par les hyperplans passant par un point A_0'''. Ce point n'appartient pas à la droite α_2, mais puisque les courbes $C_0^{(4)}$ ne passent pas par le point A_{111}, le point A_0''' appartient à la droite α_2'.

Supposons que le point A_0''' n'appartienne pas à la cubique β_1'. Alors, le point B_{21} est triple pour les courbes $C_0^{(4)}$, le point B_2 est au moins triple et le point B_1 au moins sextuple. Mais cela est impossible, car les courbes C_1 rencontreraient les courbes $C_0^{(4)}$ en plus de 19 points confondus en A. Le point A_0''' appartient donc à la cubique β_1' et le point B_{21} est double pour les courbes $C_0^{(4)}$. Dans ces conditions, le point B_2 est au moins double et le point B_1 au moins quintuple. Comme la somme des multiplicités de B_1, B_2 est au plus égale à sept, B_1 est exactement quintuple et B_2 exactement double pour les courbes considérées. Celles-ci ont en outre en commun six points B'_{11}, $B_{12}, \ldots, B_{16}$, infiniment voisins successifs, simples pour les courbes, dont le dernier est uni parfait pour I_{19}.

En projetant la surface Φ_3 de A_0''' sur un hyperplan, on obtient une surface Φ_4 dont les courbes $\Gamma_0^{(4)}$ sont les sections hyperplanes. Le point A absorbe 10×19 points d'intersection des courbes $C_0^{(4)}$, donc Φ_4 est d'ordre $n-10$ et A_0''' est un point simple de Φ_3.

Sur la surface Φ_4, au domaine du point B_{16} correspond une droite β_1''. A la cubique β_1' correspond une conique, à la droite α_2 correspond une droite, à la droite α_2' correspond un point. Enfin, à β_1 correspond un point de la conique β_1'.

Les courbes $\Gamma_0^{(4)}$ sont de genre $\pi-6$ et la formule de Zeuthen en donne la vérification.

7. Les courbes $C_0^{(5)}$ ont en A la multiplicité 13, 9 tangentes étant confondues avec a_1 et 4 avec a_8. Ces courbes ne peuvent passer par les points A_7 et B_{11}. A ces courbes correspondent sur la surface Φ_4 des courbes $\Gamma_0^{(5)}$ découpées par les hyperplans passant par un point $A_0^{(4)}$ qui appartient donc à la droite α_2.

Supposons que le point $A_0^{(4)}$ n'appartienne pas à la droite β_1''. Alors, les courbes $C_0^{(5)}$ passent simplement par le point B_{16} et par suite par les points B_{15}, B_{14}, ..., B'_{11}. Mais cela est impossible, car les courbes $C_0^{(5)}$ n'ont que quatre tangentes confondues avec a_8. Donc le point $A_0^{(4)}$ appartient à la droite β_1''.

Les courbes $C_0^{(5)}$ passent au moins une fois par le point B_{21} et par conséquent au moins une fois par B_2. Si elles passent une fois par B_2, elles ne peuvent passer par B_3 et devraient passer cinq fois par B_1, qui est au plus quadruple. Elles passent donc au moins deux fois par B_2. Supposons qu'elles passent deux fois par B_2 et une fois par B_{21}. Elles devraient alors passer une fois par B_3 et trois fois par B_1, ce qui est absurde, puisque B_3 serait uni parfait. Il en résulte qu'elles doivent passer quatre fois par B_1. Mais alors, passant quatre fois par B_1 et deux fois par B_2, elles doivent passer deux fois par B_{21}. Il en résulte que le point $A_0^{(4)}$ n'appartient pas à la conique β_1'.

Les courbes $C_0^{(5)}$ passent au plus 6 fois par A_1 et comme il y a 9 tangentes en A confondues avec a_1, ces courbes passent certainement par A_{11}. Si ces courbes passent par A_{111}, le point $A_0^{(4)}$ coïncide avec la projection de la droite α_2' de Φ_3 sur Φ_4; le domaine de ce point est donc équivalent à cette droite et il ne peut exister un point uni parfait dans le voisinage de A_1 appartenant aux courbes $C_0^{(5)}$. Il en résulte que celles-ci passent six fois par A_1, trois fois par A_{11} et trois fois par A_{111}.

Nous devons donc examiner les cas où les courbes $C_0^{(5)}$ ne passent pas par A_{111}.

Supposons en premier lieu que les courbes $C_0^{(5)}$ passent six fois par A_1. Alors, elles passent au plus trois fois par A_{11} et passent certainement par A_{111}, contrairement à l'hypothèse.

Supposons que les courbes $C_0^{(5)}$ passent cinq fois par A_1; elles passent alors une fois par A_2 et comme ce point ne peut être uni parfait, elles passent par un point au moins infiniment voisin de A_2, distinct de A_3. Les circonstances suivantes peuvent se présenter :

Les courbes ont en commun un point A'_{21}, simple, infiniment voisin de A_2, elles passent trois fois par A_{11}, une fois par un point infiniment voisin A' de A_{21}, distinct de A_{111} et une fois par deux points infiniment voisins successifs de A'.

Les courbes ont en commun deux points simples infiniment voisins successifs de A_2,passent deux fois par A_{11} et soit deux fois par un point infiniment voisin, soit une fois par un point infiniment voisin et une fois par deux points infiniment voisins, dans des directions différentes, de ce dernier.

Les courbes passent simplement par trois points infiniment voisins successifs de A_2, une fois par A_{12} et par deux points infiniment voisins successifs de A_{11}.

Le nombre de points d'intersection de deux courbes $C_0^{(5)}$ absorbés en A n'est pas multiple de 19, sauf dans un cas, où il est 12×19. Mais ce cas ne peut convenir, car le point $A_0^{(4)}$ est alors équivalent à trois droites; il est triple pour Φ_4 et le nombre des intersections absorbées devrait être 13×19.

Les courbes $C_0^{(5)}$ doivent passer au moins quatre fois par A_1, car le point A_2 ne peut être uni parfait. Si elles passent quatre fois par A_1, elles passent deux fois par A_2, une fois par un point infiniment voisin, une fois par A_{11} et une fois par quatre points infiniment voisins successifs. Le nombre des intersections absorbées en A n'est pas dans ce cas multiple de 19.

De tout ceci, résulte que $A_0^{(4)}$ représente, sur Φ_4, la courbe α_2'. Projetons Φ_4 de $A_0^{(4)}$ sur un hyperplan; nous obtenons une surface Φ_5 dont les section hyperplanes sont les courbes $\Gamma_0^{(5)}$. Cette surface est d'ordre $n-13$ et le point $A_0^{(4)}$ est triple pour la surface Φ_4.

Sur la surface Φ_5, nous avons une cubique gauche α_2', une conique β_1'. La droite α_2 est représentée par un point commun à α_2', β_1'; β_1 et β''' sont représentées par des points appartenant le premier à β_1', le second à α_2'.

Les courbes $\Gamma_0^{(5)}$ sont de genre $\pi - 8$.

8. Les courbes $C_0^{(6)}$ ont un point multiple d'ordre 15 en A, six tangentes coïncident avec a_1 et neuf avec a_8. Soient $\Gamma_0^{(6)}$ les courbes qui leur correspondent sur Φ_5; elles sont découpées par les hyperplans passant par un point $A_0^{(5)}$.

Les courbes $\Gamma_0^{(5)}$ rencontrent la courbe β_1' en un point au moins et par conséquent les courbes $C_0^{(6)}$ passent au moins une fois par le point B_{21}. Il en résulte qu'elles passent au moins une fois par B_2 et au moins deux fois par B_1. Elles ne peuvent passer par B_3, donc elles passent trois fois par B_1, une fois par B_2 et par B_{21}. De plus, elles passent simplement par les points B'_{11}, B_{12}, ..., B_{16}. Le point $A_0^{(5)}$ coïncide donc avec la projection de la droite B_1'' de Φ_4 sur Φ_5 et appartient à la conique β_1'.

Les courbes $\Gamma_0^{(6)}$ rencontrent la cubique α_2' en deux points au moins, donc les courbes $C_0^{(6)}$ passent au moins deux fois par A_{111}, donc au moins deux fois par A_{11} et au moins quatre fois par A_1. Comme les courbes C_8 ne peuvent rencontrer les courbes $C_0^{(6)}$ qu'en 19 points confondus en A, ces dernières courbes passent exactement quatre fois par A_1 et deux fois par chacun des points A_{11}, A_{111}. Le point $A_0^{(5)}$ appartient à la courbe α_2'.

En projetant Φ_5 du point $A_0^{(5)}$ sur un hyperplan, on obtient une surface Φ_6 dont les sections hyperplanes sont les courbes $\Gamma_0^{(6)}$. Cette surface est d'ordre $n - 14$, donc $A_0^{(5)}$ est simple pour la surface Φ_5. Les courbes $\Gamma_0^{(6)}$ sont de genre $\pi - 8$.

La surface Φ_6 contient une droite (exceptionnelle) β_1'', une droite β_1' rencontrant β_1'', une conique α_2' rencontrant β_1''. Un point de β_1' représente β_1 et un point par lequel passent α_2' et β_1' représente α_2. Ce dernier point est certainement multiple.

9. Les courbes $C_0^{(7)}$ ont la multiplicité 16 en A, 14 tangentes confondues avec a_1 et deux avec a_8. En reprenant le raisonnement précédent, on voit sans difficulté que ces courbes passent trois fois par A_1, deux fois par A_{11}, une fois par A_{111} et une fois par neuf points A_{12}, A_{13}, ..., A_{110}, infiniment voisins successifs de A_{11}. Elles passent en outre deux fois par B_1 et une fois par chacun des points B_2, B_{21}.

Les courbes $\Gamma_0^{(7)}$ qui correspondent aux courbes $C_0^{(7)}$ sur la surface Φ_6 sont découpées par les hyperplans passant par le point $A_0^{(6)}$ commun à β_1'' et à α_2'. La surface Φ_7, obtenue en projetant Φ_6 de $A_0^{(6)}$ sur un hyperplan, est d'ordre $n - 15$ et ses sections hyperplanes $\Gamma_0^{(7)}$ sont de genre $\pi - 8$. Au domaine du point A_{110} correspond sur la surface Φ_7 une droite α_1''. Sur cette surface sont en outre tracées une droite β_1' et une droite α_2'. A la droite β_1'' correspond un point situé sur la droite α_2'.

10. Les courbes $C_0^{(8)}$ ont un point multiple d'ordre 17 en A, trois tangentes coïncident avec a_1 et 14 avec a_8. Ces courbes ont un point double en A_1 et des points simples en A_{11}, A_{111}. Elles ont en outre des points doubles en B_1, B'_{11}, B_{12}, ..., B_{16}.

On obtient la surface Φ_8 dont les sections hyperplanes $\Gamma_0^{(8)}$ correspondent aux courbes $C_0^{(8)}$ en projetant Φ_7 d'un point $A_0^{(7)}$ commun aux droites α_1'' et β_1'. La surface Φ_8 est d'ordre $n - 17$ et ses sections hyperplanes sont de genre $\pi - 9$. Sur cette surface se trouvent tracées une droite α_2' et une conique β_1''.

11. Les courbes $C_0^{(9)}$ ont la multiplicité 18 en A, 11 tangentes coïncident avec a_1 et 7 avec a_8. Ces courbes passent simplement par les points A_1, A_{12}, ..., A_{110} et par les points Bï, $B_1{}'_1$, B_{12}, ..., B_{16}.

Les courbes $\Gamma_0^{(9)}$ qui correspondent sur la surface Φ_8 aux courbes $C_0^{(9)}$ sont découpées par les hyperplans passant par le point $A_0^{(8)}$, commun à α_2' et β_1'' qui représente d'ailleurs α_1''.

Sur la surface Φ_9, projection de Φ_8 à partir de $A_0^{(8)}$, se trouvent tracées des droites α_1'' et β_1'' se coupant en un point $A_0^{(9)}$.

La surface Φ_9 est d'ordre $n - 18$ et ses sections hyperplanes $\Gamma_0^{(9)}$ ont le genre $\pi - 9$. Le point $A_0^{(8)}$ est simple pour la surface Φ_8.

En projetant Φ_9 du point $A_0^{(9)}$ sur un hyperplan, on obtient une surface Φ_{10}, dont les sections hyperplanes correspondent aux courbes $C_0^{(10)}$, ayant un point multiple d'ordre 19 à tangentes variables en A. Cette surface Φ_{10} est d'ordre $n - 19$ et ses sections hyperplanes ont le genre $\pi - 9$. Le point $A_0^{(9)}$ est donc simple pour la surface Φ_9.

Liège, le 24 mars 1948.

M. HAYEZ, Impr. de l'Académie royale, 112, rue de Louvain, Bruxelles
(Domicile légal : rue de la Chancellerie, 4)