Extrait du *Bulletin de la Société royale des Sciences de Liège*
Séance du 20 novembre 1947. — N° 11.

Observations sur la structure des points de diramation des surfaces multiples cycliques,

par LUCIEN GODEAUX, Membre de la Société.

Nous avons consacré antérieurement plusieurs notes et mémoires à l'étude de la structure des points unis des involutions cycliques appartenant à une surface algébrique et des points de diramation (isolés) des surfaces qui représentent ces involutions [1]. Nous nous proposons dans cette courte note d'apporter quelques résultats nouveaux à cette question complexe. Nous nous proposons de reprendre d'ailleurs la question dans un mémoire où l'on trouvera un exposé d'ensemble, mémoire que nous espérons pouvoir publier dans un avenir assez proche.

1. Soit F une surface algébrique contenant une involution cyclique I_p, d'ordre premier p, supérieur à deux, n'ayant qu'un nombre fini de points unis. Désignons par T la transformation birationnelle de F en soi, génératrice de l'involution I_p.

Considérons un système linéaire $|D_1|$, simple, dépourvu de

---

(1) Les involutions cycliques appartenant à une surface algébrique (*Actualités scient. et industrielles*, Paris, Hermann, 1935); Recherches sur les involutions cycliques appartenant à une surface algébrique (*Bulletin de l'Académie royale de Belgique*, 1930, pp. 450-467; 1931, pp. 1131-1150, 1356-1365; 1935, pp. 338-344); Recherches sur les involutions cycliques du troisième ordre appartenant à une variété algébrique (*Annales de l'École Normale Supérieure*, 1937, pp. 55-79); Sur les surfaces multiples ayant un nombre fini de points de diramation (*Ibidem*, 1938, pp. 193-222); Sur la structure des points unis des involutions cycliques appartenant à une surface algébrique (*Mémoire de l'Académie royale de Belgique*, in-8°, 1938, pp. 1-44); Sur les points unis des involutions d'ordre p^2 appartenant à une surface algébrique (*Bulletin de l'Académie royale de Belgique*, 1940, pp. 28-43, 100-110, 115-128); Sur les points de diramation des surfaces multiples (*Bulletin de la Société des Sciences de Liège*, 1940, pp. 54-79, 128-137); Remarques sur les surfaces multiples ayant un nombre fini de points de diramation (*Bulletin des Sciences mathématiques*, 1940, pp. 245-256); Sur la structure des points unis des homographies cycliques du plan (*Mémoire de l'Académie royale de Belgique*, in-8°, 1941, pp. 1-42); Remarque sur l'étude des points unis des involutions cycliques appartenant à une surface algébrique (*Bulletin de la Société des Sciences de Liège*, 1941, pp. 290-295); Sur quelques points de la théorie des involutions cycliques appartenant à une surface algébrique (*Ibidem*, 1943, pp. 199-204).

points-base et soient $|D_2|$, $|D_3|$, ..., $|D_p|$ les systèmes que T, T^2, ..., T^{p-1} lui font correspondre. Le système complet

$$|C| = |D_1 + D_2 + \ldots + D_p|$$

est transformé en lui-même par T; il est dépourvu de points-base et contient un système linéaire (éventuellement) partiel $|C_1|$, dépourvu de points-base, appartenant à l'involution I_p.

Dans nos travaux antérieurs, nous avons montré que l'on peut toujours supposer que $|C|$ contient p systèmes linéaires partiels

$$|C_1|, |C_2|, \ldots, |C_p|$$

appartenant à l'involution I_p, quitte à remplacer $|C|$ par un de ses multiples convenablement choisi, ce qui revient à remplacer $|D_1|$ par un de ses multiples. Le système $|C|$ considéré est alors simple.

Les courbes C_2, C_3, ..., C_p passent par les points unis de l'involution I_p.

2. Soit A un point uni de l'involution I_p, non parfait. Il existe alors dans le domaine du premier ordre de F, deux points unis P_1, P_2 pour I_p. Dans ce domaine, T détermine une involution d'ordre p ayant précisément P_1, P_2 pour points unis.

Considérons une courbe D_1 passant par A et y touchant la droite AP_1. Les courbes D_2, D_3, ..., D_p qui lui correspondent passent également par A en y touchant AP_1. La courbe

$$C_1 \equiv D_1 + D_2 + \ldots + D_p$$

ainsi construite a en A un point multiple d'ordre p et un point infiniment voisin P_1 également multiple d'ordre p.

Nous pouvons de même construire une courbe C_1 ayant en A la multiplicité p et un point P_2, également multiple d'ordre p.

Ces deux courbes C_1 déterminent un faisceau de courbes de $|C_1|$ ayant en A la multiplicité p et p tangentes variables.

Il existe donc, dans le système $|C_1|$, des courbes, formant un système linéaire, ayant la multiplicité p en A et p tangentes variables.

3. Désignons par C'_1 les courbes C_1 passant par A; elles ont en ce point une certaine multiplicité $\rho<p$, ρ_1 tangentes étant confondues avec AP_1 et les $\rho_2=\rho-\rho_1$ autres avec AP_2.

Considérons ensuite les courbes C'_1 assujetties à toucher en A une tangente à F distincte de AP_1, AP_2 et désignons ces courbes par C''_1. Elles ont en A une multiplicité ρ' telle que $\rho < \rho' \leqslant p$.

Si $\rho' < p$, les courbes C''_1 ont en A ρ'_1 tangentes confondues avec AP_1 et les $\rho'_2 = \rho' - \rho'_1$ autres tangentes confondues avec AP_2. Dans ce cas, nous considérerons les courbes C''_1 assujetties à toucher en A une tangente à F distincte de AP_1, AP_2 et nous désignerons ces courbes par C'''_1.

Si $\rho' = p$, les courbes C''_1 ont en A la multiplicité p et coïncident nécessairement avec les courbes à tangentes variables en A construites plus haut.

En partant de $|C_1|$, on construit ainsi successivement des systèmes linéaires $|C'_1|$, $|C''_1|$, ..., dont les courbes ont des multiplicités croissantes aux points A et dont le dernier $|C_1^{(\nu)}|$ est formé de courbes ayant la multiplicité p et des tangentes variables en A.

4. Comme nous l'avons démontré, parmi les systèmes $|C_2|$, $|C_3|$, ..., $|C_p|$, il en est deux, par exemple $|C_2|$, $|C_3|$, dont les courbes passent simplement par A. D'une manière précise, nous supposerons que les courbes C_2 ont en A un point simple et y touchent la droite AP_1; les courbes C_3 ont en A un point simple et y touchent la droite AP_2.

Les courbes C_2 passent, simplement, par une suite de h_2 points unis de I_p, infiniment voisins successifs, dont le dernier, A_2, est uni parfait. Les courbes C_3 passent simplement par les points d'une suite de h_3 points infiniment voisins successifs, unis pour I_p, dont le dernier est uni parfait. Nous le désignerons par A_3.

Nous supposerons que les courbes $C_1^{(i)}$ passent respectivement $\rho^{(i)}$ fois par A et $\rho_{21}^{(i)}$, $\rho_{22}^{(i)}$, ..., $\rho_{2h_2}^{(i)}$ fois par les points de la première suite, $\rho_{31}^{(i)}$, $\rho_{32}^{(i)}$, ..., $\rho_{3h_3}^{(i)}$ fois par les points de la seconde suite. On a

$$\rho^{(i)} \geq \rho_{21}^{(i)} + \rho_{31}^{(i)},$$
$$\rho_{21}^{(i)} \geq \rho_{22}^{(i)} \geq \dots \geq \rho_{2h_2}^{(i)},$$
$$\rho_{31}^{(i)} \geq \rho_{32}^{(i)} \geq \dots \geq \rho_{3h_3}^{(i)}.$$

Les courbes $C_1^{(i)}$ ont en général d'autres branches d'origine A qui sont les unes tangentes à AP_1, les autres tangentes à AP_2. Les points de ces branches appartenant à toutes les courbes $C_1^{(i)}$ $(i = 1, 2, ..., \nu - 1)$ sont unis pour I_p et chacune des suites formées par ces points se termine par un point uni parfait.

5. Rapportons projectivement les courbes C_1 aux hyperplans d'un espace linéaire ayant même dimension que ce système. Aux groupes de I_p correspondent les points d'une surface Φ, image de l'involution.

Aux courbes C'_1 correspondent sur Φ les sections de cette surface par les hyperplans passant par le point de diramation A' homologue du point uni A. Soit Φ' la surface que l'on obtient en projetant Φ du point A' sur un hyperplan ne passant pas par ce point.

Au domaine du point A_2 correspond sur Φ' une courbe rationnelle γ_2, d'ordre $\nu_2=\rho_{2h_2}$. Au domaine du point A_3 correspond de même sur Φ' une courbe rationnelle γ_3 d'ordre $\nu_3=\rho_{3h_3}$.

Chaque suite de points unis pour I_p, communs à toutes les courbes C'_1, distincte des précédentes, se termine par un point uni parfait au domaine duquel correspond, sur Φ' une courbe rationnelle dont l'ordre est égal à la multiplicité du point considéré pour les courbes C'_1. Nous désignerons par $\gamma_{21}, \gamma_{22}, \ldots, \gamma_{2k_2}$ les courbes ainsi obtenues en partant des branches des courbes C'_1 qui touchent AP_1 en A, par $\gamma_{31}, \gamma_{32}, \ldots, \gamma_{3k_3}$ celles qui sont obtenues en partant des branches des courbes C'_1 tangentes en A à AP_2. L'ordre de la courbe γ_{ij} sera désigné par ν_{ij}.

L'ensemble des courbes $\gamma_2, \gamma_3, \gamma_{21}, \ldots, \gamma_{31}, \ldots$ fixe la structure du point de diramation A'. Le cône tangent à la surface Φ en A' est le cône projetant de ce point l'ensemble de ces courbes.

Aux courbes C''_1 correspondent sur Φ' les sections de cette surface par les hyperplans passant par un point A''. En projetant Φ' de A'' sur un hyperplan ne passant pas par ce point, on obtient une surface Φ''. Aux courbes C'''_1 correspondent sur Φ'' les sections de cette surface par les hyperplans passant par un point A''' et ainsi de suite.

On parviendra finalement à une surface $\Phi^{(\nu-1)}$ dont les sections hyperplanes correspondent aux courbes $C_1^{(\nu-1)}$. Aux courbes $C_1^{(\nu)}$ correspondent, sur $\Phi^{(\nu-1)}$, les sections de cette surface par les hyperplans passant par un point $A^{(\nu)}$, simple pour la surface, dont le domaine représente les ∞^1 groupes de I_p formés de points infiniment voisins de A.

Nous désignerons par $\Gamma_1^{(i)}$ les sections hyperplanes de la surface $\Phi^{(i)}$ et les courbes qui leur correspondent sur les autres surfaces Φ. Les sections hyperplanes de Φ seront désignées par Γ_1.

6. Les courbes C_2 rencontrent les courbes $C_1^{(i)}$, en dehors de A, en des groupes de I_p; par conséquent les points d'intersection de ces courbes absorbés en A sont en nombre multiple de p. On a donc, les λ étant des entiers positifs,

$$\rho' + \rho'_{21} + \rho'_{22} + \dots + \rho'_{2h_2} = \lambda_1 p,$$
$$\rho'' + \rho''_{21} + \rho''_{22} + \dots + \rho''_{2h_2} = \lambda_2 p,$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$\rho^{(\nu-1)} + \rho^{(\nu-1)}_{21} + \rho^{(\nu-1)}_{22} + \dots + \rho^{(\nu-1)}_{2h_2} = \lambda_{\nu-1} p.$$

Comme les courbes C''_1 sont comprises dans les courbes C'_1, les courbes C'''_1 dans les courbes C''_1, ..., on a

$$\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_{\nu-1}.$$

Les courbes C_2 coupent les courbes $C_1^{(\nu)}$ en p points confondus en A, puisque ces dernières courbes ont des tangentes variables en A. D'autre part, les courbes $C_1^{(\nu)}$ sont des courbes $C_1^{(\nu-1)}$ particulières. On a donc

$$\lambda_{\nu-1} \leq 1,$$

et comme, d'autre part, on a $\lambda_1 > 0$ puisque $\rho' > 0$, on obtient

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_{\nu-1} = 1.$$

On a donc

$$\rho^{(i)} + \rho^{(i)}_{21} + \rho^{(i)}_{22} + \dots + \rho^{(i)}_{2h_2} = p,$$

et de même

$$\rho^{(i)} + \rho^{(i)}_{31} + \rho^{(i)}_{32} + \dots + \rho^{(i)}_{3h_3} = p,$$
$$(i = 1, 2, \dots, \nu - 1).$$

C'est le résultat que nous avions obtenu pour les courbes C'_1, par une autre voie moins simple, dans notre note *Sur quelques points*... (*loc. cit.*).

7. On peut en général ranger les courbes γ dans un certain ordre

$$\gamma_{2k_2}, \dots, \gamma_{22}, \gamma_{21}, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_{31}, \gamma_{32}, \dots, \gamma_{3k_3}$$

tel que deux courbes consécutives se rencontrent en un point et que deux courbes non consécutives ne se rencontrent pas. Le point A″ est le point commun aux courbes γ_2 et γ_3; il est au plus double pour la surface Φ', puisque la droite A′A″ est double pour le cône tangent à Φ en A′.

Cela implique que l'on a

$$\rho''_{2h_2} = \rho'_{2h_2} - 1, \qquad \rho''_{3h_3} = \rho'_{3h_3} - 1.$$

Si A″ est simple pour la surface Φ', on a $\nu = 2$.

Si A″ est double pour la surface Φ', il est précisément double biplanaire et le point A‴ de Φ'' est le point commun aux deux droites qui représentent le point A″ sur cette surface.

Le point A‴ est au plus double pour la surface Φ''. S'il est simple, on a $\nu=3$; s'il est double, il est double biplanaire et ainsi de suite.

Observons qu'aux courbes C_2, C_3 correspondent des courbes Γ_2, Γ_3 rencontrant en un point, la première, la courbe γ_2, la seconde, la courbe γ_3. Sur les différentes surfaces Φ', Φ'', ..., $\Phi^{(\nu-1)}$ ces courbes ont le même ordre $n-1$, n étant l'ordre de la surface Φ. Sur la surface Φ, les courbes Γ_2, Γ_3 ont l'ordre n et passent simplement par A′.

8. Les courbes Γ_1, Γ_1', ··· satisfont à des relations fonctionnelles que nous allons indiquer.

Désignons par Δ' l'ensemble des courbes rationnelles équivalentes au point multiple A′ de Φ, par Δ'' l'ensemble des courbes rationnelles équivalentes au point A″ de Φ', ..., par $\Delta^{(\nu-1)}$ l'ensemble des courbes rationnelles équivalentes au point double $A^{(\nu-1)}$ de la surface $\Phi^{(\nu-1)}$ On a

$$\Gamma_1 \equiv \Gamma_1' + \Delta' + \Delta'' + \ldots + \Delta^{(\nu-1)},$$
$$\Gamma_1 \equiv \Gamma_1'' + \Delta' + 2\,\Delta'' + \ldots + 2\,\Delta^{(\nu-1)},$$
$$\Gamma_1 \equiv \Gamma_1''' + \Delta' + 2\,\Delta'' + 3\,\Delta''' + \ldots + 3\,\Delta^{(\nu-1)},$$
$$\Gamma_1 \equiv \Gamma^{(\nu-1)} + \Delta' + 2\,\Delta'' + 3\,\Delta''' + \ldots + (\nu-1)\,\Delta^{(\nu-1)}.$$

Liège, le 6 novembre 1947.

M. HAYEZ, Impr. de l'Académie royale, 112, rue de Louvain, Bruxelles
(Domicile légal : rue de la Chancellerie, 4)