Extrait du *Bulletin de l'Académie royale de Belgique* (Classe des Sciences)
Séance du 5 novembre 1949.

GÉOMÉTRIE ALGÉBRIQUE

Sur la construction de surfaces algébriques dont le diviseur de Severi est quelconque,

par Lucien GODEAUX,
Membre de l'Académie.

Lorsque M. Severi introduisit, en 1908, la notion de diviseur d'une surface algébrique (¹), une seule surface ayant un diviseur supérieur à l'unité était connue : la surface d'Enriques, du sixième ordre, passant doublement par les arêtes d'un tétraèdre, dont le diviseur σ est égal à deux. La surface d'Enriques est l'image d'une involution du second ordre, privée de points unis, appartenant à une surface de genres un ($p_a = P_4 = 1$), et c'est cette propriété qui entraîne le fait que le diviseur de la surface est égal à deux. Plus généralement, nous avons établi que si une surface Φ est l'image d'une involution cyclique privée de points unis appartenant à une surface algébrique, le diviseur de cette surface Φ est égal à l'ordre de l'involution (²). C'est une application de ce théorème que nous exposons dans cette note. Nous établissons précisément que :

Si, dans les équations de la surface normale, de l'espace à $\frac{1}{2}p(p+3)$ *dimensions, qui représente les courbes planes d'ordre premier* p, *on remplace les coordonnées courantes par des formes algébriques*

(¹) *Sulla totalità delle curve algebriche tracciatte sopra una superficie algebrica* (Math. Annalen, 1906, t. 62, pp. 194-225) ; *La base minima pour la la totalité des courbes tracées sur une surface algébrique* (Annales Sc. de l'École Normale sup., 1908, pp. 449-468) ; *Complementi alla teoria della base per la totalità delle curve di una superficie algebrica* (Rend. Circolo Matemetico di Palermo, 1910, t. 30, pp. 265-288).

(²) *Sur certaines surfaces algébriques de diviseur supérieur à l'unité* (Bull. de l'Acad. des Sc. de Cracovie, 1914, pp. 362-368) ; *Exemple de surfaces de diviseur supérieur à l'unité* (Bull. des Sc. Mathématiques, 1915, pp. 182-185).

de degré p, *linéairement indépendantes, ne s'annulant pas en un même point, on obtient une surface dont le diviseur de Severi est* $\sigma = \mathrm{p}$.

1. Soit p un nombre premier ; posons $n = \frac{1}{2}p(p+3)$ et considérons un espace linéaire à $n+3$ dimensions, S_{n+3}, dont les points ont pour coordonnées homogènes

$$x_0,\ x_1,\ \ldots,\ x_n,\ y_1,\ y_2,\ y_3.$$

Les équations

$$\rho x_i' = x_i, \qquad (i = c, 1, \ldots, n)$$

$$\rho y_1' = \epsilon y_1,\ \rho y_2' = \epsilon y_2,\ \rho y_3' = \epsilon y_3,$$

où ϵ est une racine primitive d'ordre p de l'unité, représentent une homographie biaxiale H, de période p, dont les axes sont un espace à n dimensions ξ, d'équations $y_1 = y_2 = y_3 = 0$ et un plan η, d'équations $x_0 = x_1 = \ldots = x_n = 0$.

Soit $i, j, \ldots, k$ un ensemble de p nombres égaux à 1, 2 ou 3. Considérons les $n+1$ équations

$$y_i y_j \ldots y_k = \varphi_{ij\cdots k}(x_0,\ x_1,\ \ldots,\ x_n), \tag{1}$$

où les φ sont des polynômes de degré p, linéairement indépendants, ne s'annulant pas en un même point. Elles représentent une surface F, d'ordre p^{n+1}, transformée en soi par l'homographie H. Sur cette surface, cette homographie détermine une involution I_p, d'ordre p, privée de points unis, car F ne rencontre aucun des axes ξ, η de H.

Pour obtenir une image Φ de l'involution I_p, il suffit de projeter la surface F à partir du plan η sur l'espace ξ, ce qui revient à éliminer y_1, y_2, y_3 entre les équations (1). L'élimination des y entre les équations (1) conduit aux équations de la surface qui, dans l'espace à n dimensions ξ, représente les courbes planes d'ordre p, mais où les coordonnées courantes ont été remplacées par les polynômes φ.

2. Désignons par C les sections hyperplanes de F, par C_0 les courbes qui sont découpées par les hyperplans passant par η, par C_1 les courbes découpées par les hyperplans passant par ξ.

Aux systèmes partiels $|C_0|$, $|C_1|$ correspondent sur Φ des systèmes complets $|\Gamma_0|$, $|\Gamma_1|$ et les courbes Γ_0 sont les sections hyperplanes de Φ.

A une courbe C correspond sur Φ une courbe Γ possédant $\frac{1}{2}(p - 1)p^{n+1}$ points doubles variables. La courbe Γ varie dans un système rationnel et appartient donc totalement à un système linéaire $|\Gamma|$. Lorsque la courbe C, variant d'une manière continue, tend vers une courbe C_0, la courbe Γ tend vers une courbe $p\Gamma_0$. Lorsque C tend vers une courbe C_1, Γ tend vers une courbe $p\Gamma_1$. On a donc

$$p\Gamma_0 \equiv p\Gamma_1,$$

bien que les systèmes $|\Gamma_0|$, $|\Gamma_1|$ soient distrincts.

Le long d'une courbe Γ_1, il y a par suite une hypersurface d'ordre p ayant un contact d'ordre $p - 1$ avec Φ, car le système $|p\Gamma_0|$ est découpé sur Φ par les hypersurfaces d'ordre p.

Une courbe C_1 est découpée sur F par un hyperplan

$$\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2 + \lambda_3 y_3 = 0.$$

Soit, comme plus haut, $ij \ldots k$ un ensemble de p nombres égaux à 1, 2, 3. En élevant les deux membres de la relation précédente à la puissance p, on obtient

$$\Sigma\, \alpha \lambda_i \lambda_j \ldots \lambda_k y_i y_j \ldots y_k = 0,$$

où les α sont des coefficients numériques. En tenant compte des équations (1), on a

$$\Sigma\, \alpha \lambda_i \lambda_j \ldots \lambda_k \varphi_{ij \ldots k} = 0,$$

équation de la famille d'hypersurfaces ayant un contact d'ordre $p - 1$ avec Φ le long des courbes Γ_1.

3. Considérons, dans S_{n+3}, les hypersurfaces d'ordre $p - 1$; elles se répartissent en p systèmes linéaires transformés chacun en soi par l'homographie H. Pour obtenir les équations de ces systèmes, on opère de la manière suivante : On écrit tous les produits formés de k des quantités $x_0, x_1, \ldots, x_n$ et de $p - 1 - k$ des quantités y_1, y_2, y_3, chacune de ces quantités pouvant évidemment intervenir plusieurs fois. Les produits ainsi obtenus sont les termes de l'équation des hypersurfaces de l'un des systèmes linéaires cherchés.

Désignons par $|D| = |(p-1)C|$ le système linéaire découpé sur F par les hypersurfaces d'ordre $p-1$, et par $|D_0|$, $|D_1|, \ldots, |D_{p-1}|$ les systèmes linéaires, compris dans le précédent, découpés par les systèmes linéaires d'hypersurfaces d'ordre $p-1$ transformés chacun en soi par l'homographie H. On peut caractériser ces systèmes en disant que $|D_0|$ contient les courbes formées de $p-1$ courbes C_0, que $|D_1|$ contient les courbes formées de $p-2$ courbes C_0 et d'une courbe $C_1, \ldots$, que $|D_k|$ contient les courbes formées de $p-k-1$ courbes C_0 et de k courbes $C_1, \ldots$, que $|D_{p-1}|$ contient les courbes formées de $p-1$ courbes C_1.

Soient $|\varDelta_0|, |\varDelta_1|, \ldots, |\varDelta_{p-1}|$ les systèmes linéaires qui correspondent sur $\varPhi$ respectivement aux systèmes $|D_0|, |D_1|, \ldots, |D_{p-1}|$ On a

$$p\varDelta_0 \equiv p\varDelta_1 \equiv p\varDelta_2 \equiv \ldots \equiv p\varDelta_{p-1}$$

et le diviseur de Severi de la surface $\varPhi$ est $\sigma = p$.

D'après l'observation faite plus haut, on a

$$\varDelta_0 \equiv (p-1)\varGamma_0, \varDelta_1 \equiv (p-2)\varGamma_0 + \varGamma_1, \ldots, \varDelta_k \equiv (p-k-1)\varGamma_0 + k\varGamma_1, \ldots, \varDelta_{p-1} \equiv (p-1)\varGamma_1.$$

Les courbes $\varDelta_0$ sont découpées sur $\varPhi$ par les hypersurfaces d'ordre $p-1$ de S_n et le long de chacune des courbes $\varDelta_1, \varDelta_2, \ldots, \varDelta_{p-1}$, il y a une hypersurface d'ordre $p(p-1)$ ayant un contact d'ordre $p-1$ avec la surface $\varPhi$ en chaque point d'intersection.

Pour obtenir l'équation d'une de ces familles d'hypersurfaces, on procédera de la manière suivante : Soient $ij \ldots l$ un ensemble formé de k nombres égaux à 1, 2, 3 et $\alpha, \beta, \ldots, \gamma$ un ensemble $p-1-k$ nombres égaux à $0, 1, 2, \ldots, n$. Formons l'équation

$$\Sigma \lambda_{ij\ldots l\alpha\beta\ldots\gamma} y_i y_j \ldots y_l x_\alpha x_\beta \ldots x_\gamma = 0.$$

En élévant les deux membres de cette équation à la puissance p et en remplaçant les expressions $y_i y_j \ldots y_l$ par $\varphi_{ij\ldots l}$, on obtient l'équation de la famille de surfaces ayant avec $\varPhi$ un contact d'ordre $p-1$ le long des courbes $\varDelta_k$.

4. Nous avons considéré le cas $p = 2$ dans une note antérieure (1). Nous allons considérer le cas $p = 3$.

Les équations de la surface Φ s'obtiennent en écrivant que la matrice

$$\left\| \begin{matrix} \varphi_{111} & \varphi_{221} & \varphi_{331} & \varphi_{112} & \varphi_{113} & \varphi_{123} \\ \varphi_{112} & \varphi_{222} & \varphi_{332} & \varphi_{122} & \varphi_{123} & \varphi_{223} \\ \varphi_{113} & \varphi_{223} & \varphi_{333} & \varphi_{123} & \varphi_{331} & \varphi_{332} \end{matrix} \right\|$$

est de caractéristique un.

Les hypersurfaces osculant Φ le long des courbes Γ_1 sont données par

$$\left. \begin{aligned} &\lambda_1^3\varphi_{111} + \lambda_2^3\varphi_{222} + \lambda_3^3\varphi_{333} + 6\lambda_1\lambda_2\lambda_3\varphi_{123} \\ &\quad + 3(\lambda_1^2\lambda_2\varphi_{112} + \lambda_2^2\lambda_3\varphi_{223} + \lambda_2^3\lambda_1\varphi_{331}) \\ &\quad + 3(\lambda_1^2\lambda_3\varphi_{113} + \lambda_2^2\lambda_1\varphi_{221} + \lambda_3^2\lambda_2\varphi_{332}) \end{aligned} \right\} = 0.$$

Les hypersurfaces osculant Φ le long des courbes

$$\Delta_1 \equiv \Gamma_0 + \Gamma_1$$

ont des équations de la forme

$$\Sigma\, a\lambda_{ij}\lambda_{lk}\lambda_{lm}x_i x_k x_l \varphi_{jkl} = 0,$$

où i, k, l prennent les valeurs 0, 1, 2, ..., 9 et j, k, sur les valeurs 1, 2, 3, a étant un coefficient numérique. On obtient cette équation en remplaçant, dans

$$(\Sigma\, \lambda_{ij}x_i y_i)^3 = 0,$$

les y par les fonctions φ donnée par les équations (1).

Enfin, les surfaces qui osculent la surface Φ le long des courbes Δ_2 sont données par l'équation

$$\Sigma\, a\lambda_{ij}\lambda_{lk}\lambda_{lm}\varphi_{ikl}\varphi_{jkl} = 0.$$

Liège, le 28 octobre 1949.

(1) *Sur une surface algébrique de diviseur deux déduite de la surface de Veronese* (Bull. de l'Acad. roy. de Belgique, 1937, pp. 830-833).