Extrait du *Bulletin de la Société royale des Sciences de Liége.*
Séance du 22 mai 1947. — N° 5.

Sur les droites multiples des surfaces algébriques,

par Lucien GODEAUX, Membre de la Société.

Cette note est consacrée à une simple observation sur l'étude des droites multiples d'une surface algébrique au moyen d'une transformation birationnelle. Si F est une surface algébrique ayant une droite a multiple d'ordre s, on peut utiliser la transformation obtenue en rapportant projectivement aux plans de l'espace les quadriques passant par a et par trois points A_1, A_2, A_3 (1). Au domaine de la droite a correspond alors une quadrique et aux points de F infiniment voisins de a, une courbe tracée sur cette quadrique.

On peut supposer que les points A_2, A_3 sont infiniment voisins successifs au point A_1 sur une branche linéaire de courbe. Précisément, nous prenons les quadriques passant par a et osculant en un point A une cubique gauche donnée. Ce cas particulier de la transformation permet d'écrire très simplement les équations de la surface transformée de F.

1. Soient a la droite $x_3 = x_4 = 0$ et K la cubique gauche d'équations

$$x_1 : x_2 : x_3 : x_4 = t^3 : t^2 : t : 1.$$

Considérons les quadriques Φ passant par a et osculant K au point O_4. Elles ont pour équation

$$\lambda_1 x_1 x_3 + \lambda_2 x_2 x_3 + \lambda_3 x_1 x_4 + \lambda_4 (x_3^2 - x_2 x_4) = 0$$

et forment un système homaloïdal $|\Phi|$. Rapportons projectivement ces quadriques aux plans de l'espace en posant

$$x_1' : x_2' : x_3' : x_4' = x_1 x_3 : x_2 x_3 : x_1 x_4 : x_3^2 - x_2 x_4. \tag{1}$$

On déduit de ces relations

$$x_1 : x_2 : x_3 : x_4 = x_1'^3 : x_1'^2 x_2' : x_1' \varphi : x_3' \varphi, \tag{2}$$

où l'on a posé

$$\varphi \equiv x_1' x_4' + x_2' x_3'.$$

Aux points infiniment voisins du point O_4 correspondent les points du plan $x_1' = 0$ et aux points infiniment voisins de la droite a correspondent ceux de la quadrique $\varphi = 0$.

(1) On peut consulter, pour l'étude de cette transformation, le fascicule II de notre *Cours de Géométrie supérieure* (Liège, Sciences et Lettres, 1940).

Les quadriques Φ coupent le plan osculateur $x_1 = 0$ à K en O_4 suivant les coniques fondamentales

$$x_1 = 0, \lambda_2 x_2 x_3 + \lambda_4 (x_3^2 - x_2 x_4) = 0.$$

Aux quadriques Φ passant par une de ces coniques correspondent les plans passant par un point. Le lieu de celui-ci est une droite a', double pour les surfaces cubiques Φ' qui correspondent aux plans. De même, aux droites passant par O_4 et situées dans le plan $O_4 a$ correspondent les points d'une droite a_1', simple par les surfaces Φ'. La droite a' a pour équations $x_1' = x_3' = 0$ et la droite a_1', $x_1' = x_2' = 0$.

Il importe de préciser la correspondance entre les points infiniment voisins de la droite a et ceux de la quadrique φ.

Aux points infiniment voisins d'un point R de a correspondent les points d'une droite r de φ, rencontrant a_1' en un point. La droite r est donc une génératrice de φ de même mode que a'.

Aux points infiniment voisins des points de a, situés dans un plan σ passant par cette droite, correspondent les points d'une droite a' de φ, rencontrant a' en un point. La droite a' est donc une génératrice de φ de même mode que la droite a_1'.

2. Considérons une surface F d'ordre n ayant la droite a comme droite multiple d'ordre s. Il lui correspond par la transformation (1), une surface F' d'ordre $3n - 2s$, passant $2n - s$ fois par la droite a' et $n - s$ fois par la droite a_1'. Mais le long de cette droite, les $n - s$ nappes de F' osculent la quadrique φ.

L'intersection de F' et de φ est, en dehors de a' et de a_1', une courbe d'ordre n, γ, qui représente le domaine de la droite a sur la surface F.

Par un point de a passent s plans tangents à F; donc les droites r rencontrent la courbe γ en s points.

Un plan passant par a coupe encore F suivant une courbe d'ordre $n - s$; donc ce plan est tangent à F en $n - s$ points de a et les droites a' coupent γ en $n - s$ points.

Représentons par $\alpha_{i,k}$ un polynome entier, rationnel et homogène en x_1, x_2, de degré k. L'indice i est un numéro d'ordre. L'équation de la surface F peut s'écrire

$$\begin{aligned} & x_3^s \alpha_{0,n-s} + x_3^{s-1} x_4 \alpha_{1,n-s} + \cdots + x_4^s \alpha_{s,n-s} \\ + \; & x_3^{s+1} \alpha_{0,n-s-1} + x_3^s x_4 \alpha_{1,n-s-1} + \cdots + x_4^{s+1} \alpha_{1+1,n-s-1} \\ + \; & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ + \; & x_3^n \alpha_{0,0} + x_3^{n-1} x_4 \alpha_{1,0} + \cdots + x_4^n \alpha_{n,0} = 0. \end{aligned}$$

L'équation de la surface F' s'écrit alors (nous écrivons x_1, x_2, x_3, x_4 au lieu de x'_1, x'_2, x'_3, x'_4, aucune confusion n'étant possible)

$$\begin{aligned} & x_1^{2n-2s}\left[x_1^s \alpha_{0,n-s} + x_1^{s-1} x_3 \alpha_{1,n-s} + \cdots + x_3^s \alpha_{s,n-s}\right] \\ + \; & x_1^{2n-2s-2} \varphi \left[x_1^{s+1} \alpha_{0,n-s-1} + \cdots x_3^{s+1} \alpha_{s+1,n-s-1}\right] \\ + \; & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ + \; & \varphi^{n-s}\left[x_1^n \alpha_{0,0} + \cdots + x_3^n \alpha_{n,0}\right] = 0. \end{aligned}$$

La courbe γ a pour équation

$$\varphi = 0, \quad x_1^s \alpha_{0,n-s} + x_1^{s-1} x_3 \alpha_{1,n-s} + \cdots + x_3^s \alpha_{s,n-s} = 0.$$

La seconde équation représente le cône projetant la courbe γ du point O'_4.

3. La courbe γ rencontrant les génératrices r et r' de la quadrique φ respectivement en s et $n - s$ points, est de genre $(n-s-1)(s-1)$.

En un point-pince de la droite a pour la surface F, deux plans tangents sont confondus et la droite r correspondante sur φ est tangente à la courbe γ. Les droites r découpent sur γ une série g_s^1, possédant $2(n-s)(s-1)$ points doubles. Il y a donc $2(n-s)(s-1)$ points-pince de la surface F sur la droite a.

Les droites r' découpant sur γ une série linéaire g_{n-s}^1, il y a $2s(n-s-1)$ plans passant par a, coupant F suivant une courbe d'ordre $n-s$ tangente en un point à la droite a.

4. Supposons que la courbe γ dégénère en une courbe d'ordre $n-s$ et une droite r. Nous pouvons supposer sans restriction que cette droite a pour équations $x_2 = x_4 = 0$. Si dans l'équation du cône projetant γ de O'_4, on fait $x_2 = 0$, l'équation doit être vérifiée identiquement; il faut donc que les polynomes $\alpha_{0,n-s}$, $\alpha_{1,n-s}, \ldots, \alpha_{s,n-s}$ ne contiennent pas de terme en x_1^s. Mais alors, si l'on se reporte à l'équation de la surface F, le point O_1, qui correspond à la droite r envisagée, est multiple d'ordre $s+1$ pour la surface.

Inversement, si un point de a est multiple d'ordre $s+1$ pour la surface F, la droite r correspondante se détache de la courbe γ.

Supposons maintenant que la courbe γ dégénère en une courbe d'ordre $n-1$ et une droite r'. Le plan passant par a homologue de cette droite est tangent à F le long de cette droite Inversement, si F a un plan tangent fixe le long de la droite a, la droite r' homologue de ce plan se détache de la courbe γ.

Si en particulier la surface F a s plans tangents fixes le long de la droite a, la courbe γ se décompose en s droites r' et en $n-s$ droites r. La surface F possède donc $n-s$ points multiples d'ordre $s+1$ sur a. C'est d'ailleurs un résultat que l'on vérifie directement sans difficulté.

5. Supposons que la surface F ait la droite a comme droite double ($s = 2$). La courbe γ rencontre alors les génératrices r de φ en deux points.

Si tous les points de la droite a sont des points-pince pour F, il y a une correspondance biunivoque entre les points de a et les plans tangents en ces points, dans l'hypothèse où le plan tangent varie avec le point de contact. Les points de F infiniment voisins de a ont donc pour homologues sur φ les points d'une conique γ_1. La courbe γ dégénère en la conique γ_1 comptée deux fois (F' touche φ le long de γ_1) et en $n - 4$ droites r.

Il en résulte que la surface F possède $n - 4$ points triples sur la droite a. Au plan de la conique γ_1 correspond une quadrique Φ qui se raccorde avec la surface F le long de a.

Si les plans tangents à F aux points de a sont confondus en un même plan fixe, la surface F' touche φ le long de la génératrice r' homologue de ce plan et la courbe γ dégénère en cette droite r' comptée deux fois et en $n - 2$ droites r. La surface F possède donc $n - 2$ points triples sur la droite a.

On arrive à un résultat analogue si la droite a est tacnodale pour la surface F, c'est-à-dire si tous les points de a sont des tacnodes de F. Si le plan tangent à la surface en un point de a varie avec ce point, la courbe γ dégénère en une section plane γ_1 de Φ, double par la surface F', et en $n - 4$ génératrices r. Si, au contraire, les plans tangents aux différents points de a sont confondus en un seul, la courbe γ_1 se compose d'une génératrice r', double pour la surface F', et de $n - 2$ génératrices r. Dans le premier cas, la surface F possède $n - 4$ points triples, dans le second, $n - 2$ points triples sur la droite a.

6. Supposons maintenant que la droite a soit triple pour F et que tous les points de cette droite soient des points-pince. Supposons qu'en un point R de a, les plans tangents simple ρ_1 et double ρ_2 soient tous deux variables avec le point de contact. Il y a une homographie, d'une part, entre les points R et les plans ρ_1, d'autre part, entre les points R et les plans ρ_2. Par conséquent, aux points infiniment voisins de a situés dans les plans ρ_1 correspondent sur φ les points d'une conique γ_1. Aux points infiniment voisins de a situés dans les plans ρ_2 correspondent les points d'une conique γ_2, qui est une composante double de la courbe γ.

La courbe γ se compose donc de la conique γ_1, de la conique γ_2 comptée deux fois, et de $n - 6$ génératrices r. La surface F possède $n - 6$ points quadruples sur a et deux points où les trois plans tangents sont confondus.

Liège, le 12 mai 1947.