Extrait du *Bulletin de la Société royale des Sciences de Liége*
Séance du 16 octobre 1947. — Nos 7-10.

Sur l'existence de certaines surfaces doubles,

par Lucien GODEAUX, Membre de la Société.

Dans cette note, nous construisons une surface F d'ordre $3n-6$, ayant un point O multiple d'ordre $3n-9$, en partant d'une surface Φ d'ordre n ayant en O la multiplicité $n-4$. Si nous menons par O une droite p, elle coupe F en trois points et Φ en quatre points; il existe une involution du second ordre comprenant comme couples deux couples extraits des quatre points situés sur Φ et un couple formé du point O et d'un des points situés sur F. Nous transformons birationnellement la surface F en une surface hyperspatiale F_0; celle-ci possède une section hyperplane le long de laquelle elle est touchée par un hyperplan; sur cette section, elle possède $12(n-3)^2$ points doubles coniques. Nous démontrons que la surface F_0 ne peut être l'image d'une involution du second ordre et avoir pour points de diramation les $12(n-3)^2$ points doubles coniques que si $n=4$. Dans ce cas, l'involution existe, comme nous l'avons établi antérieurement [1].

1. Considérons une surface Φ d'ordre n, ayant en un point O la multiplicité $n-4$. Une droite p passant par O coupe encore Φ en quatre points qui peuvent être répartis, de trois manières différentes, en deux couples de points. Considérons une de ces répartitions. Les deux couples de points déterminent sur p une involution du second ordre; soit P le conjugué de O dans cette involution. A chaque répartition des quatre points en deux couples, correspond un point P et nous avons donc, sur la droite p, trois positions du point P. Lorsque la droite p varie dans la gerbe de sommet O, le point P décrit une surface F, rencontrée, en dehors de O, en trois points par une droite passant par O.

Soit

$$\Phi \equiv x_4^4\,\varphi_{n-4}(x_1, x_2, x_3) + x_4^3\,\varphi_{n-3} + x_4^2\,\varphi_{n-2} + x_4\,\varphi_{n-1} + \varphi_n = 0$$

---

[1] Recherches sur la construction de surfaces algébriques irrégulières (*Bull. de l'Acad. roy. de Belgique*, 1945, pp. 17-32). La surface F, dans le cas où $n=4$ et où Φ est une surface de Kummer, avait déjà été considérée par G. Humbert (*Journal de Liouville*, 1896).

l'équation de la surface Φ, les φ étant des formes algébriques en x_1, x_2, x_3 dont le degré est indiqué par l'indice.

L'équation de la surface F s'écrit

$$3\,\frac{\partial^4\Phi}{\partial x_4^4}\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x_4}\right)^2 - 2\,\Phi\left(\frac{\partial^3\Phi}{\partial x_4^3}\right)^2 = 0. \qquad (1)$$

En développant, on obtient

$$\left.\begin{aligned} & x_4^3\left[4\varphi_{n-4}\varphi_{n-3}\varphi_{n-2} - 8\varphi_{n-4}^2\varphi_{n-1} - \varphi_{n-3}^3\right] \\ + & x_4^2\left[4\varphi_{n-4}\varphi_{n-2}^2 - 2\varphi_{n-4}\varphi_{n-3}\varphi_{n-1} - 16\varphi_{n-4}^2\varphi_n - \varphi_{n-3}^2\varphi_{n-2}\right] \\ + & x_4\left[4\varphi_{n-4}\varphi_{n-2}\varphi_{n-1} - 8\varphi_{n-4}\varphi_{n-3}\varphi_n - \varphi_{n-1}\varphi_{n-3}^2\right] \\ + & \varphi_{n-4}\varphi_{n-1}^2 - \varphi_n\varphi_{n-3}^2 = 0. \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

La surface F est donc d'ordre $3\,n - 6$ et possède la multiplicité $3\,n - 9$ au point O.

2. L'équation de la surface F, mise sous la forme (1), montre qu'elle possède une courbe double D, d'ordre $(n-1)(n-3)$, d'équations

$$\frac{\partial\Phi}{\partial x_4} = 0, \qquad \frac{\partial^3\Phi}{\partial x_4^3} = 0,$$

ou encore

$$4x_4^3\varphi_{n-4} + 3x_4^2\varphi_{n-3} + 2x_4\varphi_{n-2} + \varphi_{n-1} = 0,$$
$$4x_4\varphi_{n-4} + \varphi_{n-3} = 0.$$

La première de ces équations peut s'écrire, en tenant compte de la seconde,

$$2x_4^2\varphi_{n-3} + 2x_4\varphi_{n-2} + \varphi_{n-1} = 0.$$

On en conclut que la courbe D a la multiplicité $(n-3)(n-4)$ au point O.

Le cône projetant la courbe D du point O a pour équation

$$\psi_{3n-9} \equiv 4\,\varphi_{n-4}\varphi_{n-3}\varphi_{n-2} - 8\,\varphi_{n-4}^2\varphi_{n-1} - \varphi_{n-3}^3 = 0.$$

C'est précisément le cône tangent à la surface F au point O.

Ce cône possède $(n-3)(n-4)$ droites doubles de rebroussement, d'équations

$$\varphi_{n-4} = 0, \quad \varphi_{n-3} = 0.$$

Le long d'une de ces droites, le cône touche $\varphi_{n-4} = 0$.

Ces $(n-3)(n-4)$ droites appartiennent à la surface F et le long d'une de ces droites, cette surface touche le cône $\varphi_{n-3} = 0$.

Le cône $\psi_{3n-9}=0$ est formé de droites rencontrant en un seul point en dehors de O la courbe D; par conséquent, celle-ci est de genre

$$\frac{7}{2}(n-3)(n-4)+1.$$

3. Pour étudier la surface F, nous la transformerons en une surface F′ de manière à faire correspondre à la courbe double D une courbe plane D′. Dans ce but, nous effectuerons la transformation de Jonquières :

$$\rho x_1 = 4x'_1\varphi'_{n-4},$$
$$\rho x_2 = 4x'_2\varphi'_{n-4},$$
$$\rho x_3 = 4x'_3\varphi'_{n-4},$$
$$\rho x_4 = 4x'_4\varphi'_{n-4} - \varphi'_{n-3},$$

où φ'_{n-4}, φ'_{n-3} représentent les polynomes φ_{n-4}, φ_{n-3} où l'on a remplacé x_1, x_2, x_3 par x'_1, x'_2, x'_3. Au monoïde $4x_4\varphi_{n-4}+\varphi_{n-3}=0$ correspond le plan $x'_4=0$.

La surface F′ a pour équation (nous écrivons x au lieu de x', aucune confusion n'étant possible)

$$4^3x_4^3\varphi_{n-4}^3\psi_{3n-9} + 4^2x_4^2\varphi_{n-4}^2\psi_{4n-12} + 4x_4\varphi_{n-4}\psi_{3n-9}\psi_{2n-6} + \psi_{3n-9}^2 = 0,$$

où ψ_{4n-12}, ψ_{2n-6} sont des formes algébriques en x_1, x_2, x_3 dont le degré est indiqué par l'indice.

La surface F′ est d'ordre $6n-18$. Ses éléments multiples sont :

1° Le point O, multiple d'ordre $6n-21$. Dans le domaine du premier ordre du point O, la surface possède une courbe simple infiniment petite d'ordre $3n-9$, située sur le cône $\psi_{3n-9}=0$, et une courbe triple infiniment petite, d'ordre $n-4$, située sur le cône $\varphi_{n-4}=0$.

2° Une courbe double D′, d'ordre $3n-9$, d'équations

$$x_4=0, \qquad \psi_{3n-9}=0.$$

Le cône projetant cette courbe du point O touche F′ en ce point.

3° $(n-3(n-4)$ droites doubles

$$\varphi_{n-4}=0, \qquad \varphi_{n-3}=0,$$

qui sont doubles également pour le cône $\psi_{3n-9}=0$. Ces droites forment l'intersection complète des cônes

$$\varphi_{n-4}=0, \qquad \psi_{3n-9}=0.$$

4. Les adjointes d'ordre $6n - 22$ à la surface F′ doivent passer $6n - 23$ fois par O, deux fois par la courbe d'ordre $n - 4$, infiniment voisine de ce point, enfin une fois par la courbe D′.

Une droite du cône $\varphi_{n-4} = 0$ coupe une de ces adjointes en $6n - 21$ points confondus en O; donc le cône en question est une composante fixe du système des adjointes. La partie variable de celles-ci est une surface d'ordre $5n - 18$, passant $5n - 19$ fois par O, une fois par la courbe d'ordre $n - 4$ infiniment voisin de O et une fois par la courbe D′.

Il en résulte que la partie variable des adjointes a pour équation

$$x_4 \varphi_{n-4} \xi_{4n-15} + \psi_{3n-9} \xi_{2n-9} = 0,$$

où les ξ sont des formes algébriques, à coefficients variables, dont le degré est indiqué par l'indice.

Le genre géométrique des surfaces F, F′ est donc

$$p_g = (2n - 7)(5n - 17).$$

5. Nous allons transformer la surface F′ en une surface hyperspatiale F_0. Considérons à cet effet les surfaces d'ordre $3n - 9$ passant simplement par la courbe D′ et ayant la multiplicité $3n - 10$ en O. Nous supposerons de plus que ces surfaces touchent en O le cône $\varphi_{n-4} = 0$. Ces surfaces ont donc pour équation

$$x_4 \varphi_{n-4} \xi_{2n-6} + \psi_{3n-9} = 0.$$

Rapportons-les projectivement aux hyperplans d'un espace linéaire S à $(n - 2(2n - 5)$ dimensions en posant

$$\left.\begin{aligned} &\rho X_{ikl} = 4 x_4 \varphi_{n-4} x_1^i x_2^k x_3^l, \qquad (i + k + l = 2n - 6), \\ &\rho X_0 = \psi_{3n-9}. \end{aligned}\right\} \quad (3)$$

L'élimination des x entre les équations précédentes, sauf la dernière, donne les équations du cône V_3 projetant, du point $X_{ikl} = 0$, la surface de Veronese généralisée représentant les courbes d'ordre $2n - 6$ du plan. Ce cône est donc d'ordre $(2n - 6)^2$.

Cela étant, observons que le polynome ψ_{3n-9}^2 peut s'écrire en fonction rationnelle et entière des X_{ikl}; on obtient ainsi un polynome du troisième ordre que nous désignerons par α_3. De même, les polynomes ψ_{4n-12}, ψ_{2n-6} qui figurent dans l'équation de F′ donnent des polynomes du second et du premier degré en X_{ikl}; nous les désignerons par α_2, α_1 respectivement.

Considérons la surface F_0, section du cône V_3, par l'hypersurface

$$X_0^3 + X_0^2\alpha_1 + X_0\alpha_2 + \alpha_3 = 0.$$

Moyennant les formules (3), il correspond à F_0 précisément la surface F'. La surface F_0 est donc une transformée birationnelle de la surface F'. Cette surface F_0 est d'ordre $12(n-3)^2$.

Puisque α_3 provient de ψ_{3n-9}^2 l'hyperplan $X_0=0$ touche la surface F_0 le long d'une courbe Δ, d'ordre $6(n-3)^2$.

6. Les génératrices du cône $\psi_{3n-9}=0$ ne rencontrent plus la surface F' en dehors du point O et de la courbe D'. Par suite, celles de ces génératrices qui rencontrent une section plane de F' (ne passant pas par O) en dehors de D' et des droites doubles de la surface appartiennent à celle-ci.

Les droites

$$\varphi_{n-4} = 0, \quad \varphi_{n-3} = 0$$

sont doubles pour le cône $\psi_{3n-9}=0$ et pour F'. Observons que chacune de ces droites compte pour six dans l'intersection du cône et de la surface. On en conclut que la surface F' contient

$$(6n-18)(3n-9) - 2(3n-9) - 6(n-3)(n-4) = 12(n-3)^2$$

droites simples du cône $\psi_{3n-9}=0$.

Ces droites sont fondamentales pour le système de surfaces

$$x_4\,\varphi_{n-4}\,\xi_{2n-6} + \psi_{3n-9} = 0$$

et par conséquent il leur correspond, sur la surface F_0, $12(n-3)^2$ points doubles coniques de cette surface.

On peut d'ailleurs voir que l'on peut retrouver ces points doubles coniques de F_0 par une autre voie.

Le plan tangent à la surface F_0 en un point de la courbe Δ est l'intersection de l'espace tangent en ce point au cône V_3 et de l'hyperplan

$$\alpha_2\,X_0 = 0.$$

Ce plan tangent est donc indéterminé aux points pour lesquels on a $\alpha_2=0$. Ces points sont doubles coniques pour F_0 et sont bien au nombre de $12(n-3)^2$, puisque Δ est une courbe d'ordre $6(n-3)^2$.

7. Appelons Ψ la surface de Veronese généralisée, section du cône V_3 par l'hyperplan $X_0=0$. La surface Ψ représente les courbes d'ordre $2n-6$ d'un plan σ.

Aux droites du plan σ correspondent sur Ψ des courbes rationnelles normales d'ordre $2n-6$ et le cône projetant une de ces courbes du point $X_{ikl}=0$ de S coupe F_0 suivant une courbe C_0 d'ordre $6(n-3)$.

Les génératrices du cône en question découpent sur une courbe C_0 une série linéaire g^1_3 possédant $12(n-3)$ points doubles. Il en résulte que les courbes C_0 sont de genre $6n-20$.

Les courbes C_0 forment un réseau de degré trois.

Aux courbes d'ordre $n-3$ du plan σ correspondent sur Ψ des courbes d'ordre $2(n-3)^2$ et les cônes projetant ces courbes du point $X_{ikl}=0$ dans S découpent, sur F_0, des courbes C d'ordre $6(n-3)^2$. On a

$$C \equiv (n-3)\,C_0$$

et par conséquent, les courbes C sont de genre

$$\frac{3}{2}(n-3)(5n-18)+1.$$

Le système $|C|$ a la dimension $\frac{1}{2}n(n-3)$ et le degré $3(n-3)^2$.

8. Supposons que la surface F, c'est-à-dire F_c, puisse représenter une involution du second ordre appartenant à une surface F^*, les points de diramation étant les $12(n-3)^2$ points doubles coniques de F_0 situés sur la courbe Δ.

Chacun de ces points doubles est équivalent à une courbe rationnelle de degré -2. Si nous désignons par A la somme des courbes ainsi obtenues pour les $12(n-3)^2$ points doubles, nous devons avoir

$$2\,C \equiv 2\Delta + A.$$

Les courbes C et la courbe Δ ont pour homologues, sur la surface F^* supposée existante, des courbes appartenant à un même système linéaire.

Les transformées des courbes C sont de genre

$$3(n-3)(5n-18)+1.$$

La transformée de la courbe Δ, qui possède $12(n-3)^2$ points de diramation, a le genre

$$(n-3)(13n-46)+1.$$

Ces nombres doivent être égaux. Ils ne le sont que pour $n=4$; donc la surface F^* ne peut exister que pour $n=4$; on sait d'ailleurs que dans ce cas, elle existe effectivement.

Liège, le 14 octobre 1947.