Extrait du *Bulletin de l'Académie royale de Belgique* (Classe des Sciences)
Séance du 2 août 1949

GÉOMÉTRIE ALGÉBRIQUE

Sur la construction de surfaces non rationnelles de genres zéro,

par LUCIEN GODEAUX,
Membre de l'Académie.

On sait que la surface d'Enriques, du sixième ordre, passant doublement par les arêtes d'un tétraèdre, de genres $p_a = p_g = 0$, $P_2 = 1$, est l'image d'une involution du second ordre, privée de points unis, appartenant à une surface de genres un ($p_a = P_4 = 1$) (1). Ceci nous a conduit à nous demander s'il n'était pas possible de construire des surfaces de genres $p_a = p_g = 0$, $P_2 > 1$ comme images d'involutions privées de points unis, appartenant à une surface algébrique. En appliquant cette remarque, nous avons pu construire une surface de genres $p_a = p_g = 0$, $P_2 = 2$, $P_3 = 4$, comme image d'une involution cyclique du cinquième ordre, appartenant à une surface de genres $p_a = p_g = 4$, $p^{(1)} = 6$ (2).

Dans cette note, nous allons reprendre cette question de la construction des surfaces de genres $p_a = p_g = 0$, $P_2 > 1$ et nous construirons une surface de genres $p_a = p_g = 0$, $P_2 = 3$.

1. Soit F une surface algébrique régulière, de genres $p_a =$

(1) *Un' osservazione relativa alle superficie di bigenere uno* (REND. ACCAD. DI BOLOGNA, 1907-1908). On trouvera, dans notre exposé sur *Les surfaces algébriques non rationnelles de genres arithmétique et géométrique nuls* (ACTUAL. SCIENT., n° 123, Paris, Hermann, 1934), les renseignements bibliographiques et les résultats obtenus dans la question.

(2) Sur une surface algébrique de genre zéro et de bigenre deux (REND. ACCAD. N. DEI LINCEI, 2e ser., 1931). Voir aussi BULL. DE L'ACAD. DE BELGIQUE, 1932 et l'exposé cité plus haut.

$p_g \geqslant 3$, dont le système canonique $|C|$ ne soit pas composé avec un faisceau et ne possède pas de composante fixe. Supposons qu'il existe une transformation birationnelle T de F en soi, de période p, engendrant sur la surface une involution I_p, d'ordre p, privée de points unis. Soit Φ une surface image de l'involution I_p. La surface F étant régulière, il en est de même de la surface Φ.

Entre le genre arithmétique p_a de F et celui p'_a de Φ, nous avons la relation (1)

$$p_a + 1 = p\ (p'_a + 1).$$

Si donc nous supposons $p = p_a + 1$, nous aurons $p'_a = 0$ et la surface Φ sera dépourvue de courbes canoniques.

Dans une note antérieure (2), nous avons démontré que dans ces conditions, le système canonique $|C|$ de F contient $p - 1 = p_a$ courbes transformées chacune en soi par T. Nous désignerons ces courbes par $C_1, C_2 \ldots, C_{p-1}$ et par $\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_{p-1}$ les courbes qui leur correspondent sur Φ.

En désignant par ϵ une racine primitive d'ordre p de l'unité, nous pouvons attacher, à chacune des courbes $C_1, C_2, \ldots, C_{p-1}$, respectivement les nombres $\epsilon, \epsilon^2, \ldots, \epsilon^{p-1}$.

Nous distinguerons deux cas, suivant que p est pair ou impair.

2. Supposons en premier lieu p impair et posons $p = 2\nu + 1$.

Le système bicanonique $|D| = |2\,C|$ de F contient p systèmes linéaires partiels appartenant à l'involution I_p, à savoir :

Le système $|D_0|$, qui contient les courbes $C_1 + C_{p-1}$, $C_2 + C_{p-2}, \ldots, C_\nu + C_{\nu+1}$;

Le système $|D_1|$, qui contient les courbes $C_2 + C_{p-1}$, $C_3 + C_{p-2}, \ldots, C_\nu + C_{\nu+2}$, $2\,C_{\nu+1}$;

Le système $|D_2|$, qui contient les courbes $2\,C_1$, $C_3 + C_{p-1}$, $C_4 + C_{p-2}, \ldots, C_\nu + C_{\nu+3}$, $C_{\nu+1} + C_{\nu+2}$;

....

Le système $|D_{p-1}|$, qui contient les courbes $C_1 + C_{p-2}$, $C_2 + C_{p-3}, \ldots, C_{\nu-1} + C_{\nu+1}$, $2C_\nu$.

(1) *Sur les involutions cycliques...* (BULL. DE L'ACAD DE BELGIQUE, 1932, pp. 672-679) et l'exposé cité plus haut.

(2) Voir notre exposé sur *Les involutions cycliques appartenant à une surface algébrique* (ACTUAL. SCIENT., n° 270, Paris, Hermann, 1935).

Aux systèmes $|D_0|$, $|D_1|$, ..., $|D_{p-1}|$ sont respectivement attachés les nombres 1, ϵ, ..., ϵ^{p-1}.

Nous désignerons par $|\Delta_0|$, $|\Delta_1|$, ..., $|\Delta_{p-1}|$ les systèmes linéaires complets qui correspondent sur Φ respectivement aux systèmes $|D_0|$, $|D_1|$, ..., $|D_{p-1}|$.

3. Le système adjoint à la courbe Γ_1 est celui des systèmes $|\Delta_0|$, $|\Delta_1|$, ..., $|\Delta_{p-1}|$ qui ne contient pas Γ_1, c'est donc le système $|\Delta_1|$.

Plus généralement, l'adjoint à la courbe Γ_i ne peut contenir cette courbe et est donc le système $|\Delta_i|$.

Il en résulte que le système bicanonique de Φ est le système $|\Delta_0|$. D'ailleurs, on a

$$\Gamma_1'' \equiv \Gamma_2' + \Gamma_{p-1} \equiv 2\Gamma_1 + \Gamma_{p-1}$$

d'où

$$|\Delta_0| = |\Gamma_1'' - \Gamma_1| = |\Gamma_1 + \Gamma_{p-1}|.$$

Si $p^{(1)}$ est le genre linéaire de F, les courbes Γ_1, Γ_2,..., Γ_{p-1} ont le genre π donné par la formule de Zeuthen, c'est-à-dire par

$$p^{(1)} - 1 = p\ (\pi - 1).$$

On sait que l'on a, pour le bigenre P_2' de Φ, $P_2' = \pi$, π étant le genre linéaire de cette surface. On a donc

$$p^{(1)} = (p_a + 1)\ (P_2' - 1) + 1.$$

Les dimensions des systèmes linéaires $|\Delta_1|$, $|\Delta_2|$, ..., $|\Delta_{p-2}|$ sont au plus égales à $\pi - 1$; nous les désignerons par $\pi - 1 - \delta_1$, $\pi - 1 - \delta_2$, ..., $\pi - 1 - \delta_{p-1}$, où δ_1, δ_2, ..., δ_{p-1} sont des entiers positifs ou nuls.

Dans le système bicanonique $|D|$ de F, T agit comme une homographie et on a par conséquent

$$p(\pi - 1) + p - (\delta_1 + \delta_2 + \ldots + \delta_{p-1}) = P_2.$$

Or, on a

$$P_2 = p_a + p^{(1)} = (p_a + 1)\ \pi = p\pi.$$

On en conclut $\delta_1 = \delta_2 = \ldots = \delta_{p-1} = 0$. Les systèmes $|\Delta_0|$ $|\Delta_1|, \ldots, |\Delta_{p-1}|$ ont donc tous la même dimension $\pi - 1$.

4. Supposons maintenant p pair et posons $p = 2\,\nu$.

Le système bicanonique $|D| = |2C|$ de F contient encore p systèmes linéaires partiels $|D_0|, |D_1|, \ldots, |D_{p-1}|$ appartenant à l'involution I_p.

Le système $|D_0|$ contient les courbes $C_1 + C_{p-1}, C_2 + C_{p-2}, \ldots, 2\,C_\nu$.

Le système $|D_1|$ contient les courbes $C_2 + C_{p-1}, C_3 + C_{p-2}, \ldots, C_{\nu-1} + C_{\nu+2}, C_\nu + C_{\nu+1}$.

Le système $|D_2|$ contient les courbes $2C_1 + C_3 + C_{p-1}, \ldots, C_\nu + C_{\nu+2}, 2C_{\nu+1}$.

. . . .

Le système $|D_{p-1}|$ contient les courbes $C_1 + C_{p-2}, C_2 + C_{p-3}, \ldots, C_{\nu-2} + C_{\nu+1}, C_{\nu-1} + C_\nu$.

Aux systèmes $|D_0|, |D_1|, \ldots, |D_{p-1}|$ sont respectivement attachés les nombres $1, \epsilon, \ldots, \epsilon^{p-1}$.

Nous désignerons encore par $|\Delta_0|, |\Delta_1|, \ldots, |\Delta_{p-1}|$ les systèmes complets qui leur correspondent sur Φ.

5. Comme dans le premier cas, le système adjoint à la courbe Γ_i ne peut contenir cette courbe et est par conséquent le système $|\Delta_i|$.

Le système bicanonique est donc le système $|\Delta_0|$ et on a

$$\Gamma_1'' \equiv \Gamma_2' + \Gamma_{p-1} \equiv 2\,\Gamma_1 + \Gamma_{p-1},$$

donc

$$\Gamma'' - \Gamma_1 \equiv \Gamma_1 + \Gamma_{p-1} \equiv \Delta_0.$$

Le genre π des courbes $\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_{p-1}$ est donné par

$$p^{(1)} - 1 = p\,(\pi - 1)$$

et on a

$$P_{\,:} = \pi, \qquad p^{(1)} = (p_a + 1)\,(P_2' - 1) + 1.$$

Le raisonnement fait plus haut est encore applicable et montre que les systèmes $|\Delta_0|, |\Delta_1|, \ldots, |\Delta_{p-1}|$ ont tous la dimension $\pi - 1$.

6. L'application du procédé de construction précédent est aisée lorsque l'on connait un modèle projectivement canonique de la surface F. Nous allons précisément considérer le cas où la surface F est l'intersection de quatre hyperquadriques de l'espace S_6 (¹). On a alors $p_a = 7$ et $p = 8$.

Considérons, dans un espace linéaire S_6, l'homographie cyclique de période huit.

$$x_1' : x_2' : \dots : x_7' = \epsilon x_1 : \epsilon^2 x_2 : \dots : \epsilon^7 x^7, \tag{1}$$

où

$$\epsilon = (1 + i)\frac{\sqrt{2}}{2}$$

est une racine primitive d'ordre huit de l'unité.

Considérons la surface F, d'ordre 16, commune aux hyperquadratiques

$$\begin{aligned} a_1x_1x_7 + a_2x_2x_6 + a_3x_3x_5 + a_4x_4^2 &= 0, \\ b_1x_1^2 + b_2x_5^2 + b_3x_3x_7 + b_4x_4x_6 &= 0, \\ c_1x_2^2 + c_2x_6^2 + c_3x_1x_3 + c_4x_5x_7 &= 0, \\ d_1x_3^2 + d_2x_7^2 + d_3x_1x_5 + d_4x_2x_4 &= 0. \end{aligned}$$

Cette surface a les genres $p_a = p_g = 7$, $p^{(1)} = 17$, $P_2 = 24, \dots$. Elle est transformée en soi par l'homographie (1) et celle-ci, détermine sur la surface une involution I_8, d'ordre huit, privée de points unis, comme il est facile de le vérifier.

La surface Φ, image de l'involution, a les genres $p_a = p_g = 0$, $p^{(1)} = P_2 = 3$, $P_3 = 7, \dots$.

On peut prendre, comme modèle projectif de Φ, une surface tricanonique, d'ordre 18, de S_6. Sur cette surface, aux courbes $C_1, C_2, \dots, C_7$ découpées sur F par les hyperplans $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $\dots$, $x_7 = 0$, correspondent des courbes $\Gamma_1, \Gamma_2, \dots, \Gamma_7$ d'ordre dix et de genre trois.

Le système tricanonique comprend les courbes

(¹) Le fait que cette surface est projectivement canonique, c'est-à-dire que ses sections hyperplanes forment le système canonique complet, est établi dans les *Lezioni sulla teoria delle superficie algebriche* d'ENRIQUES et CAMPEDELLI (Padoue, Cedam, 1932). Voir p. 338.

$$2\Gamma_1 + \Gamma_6,\ 2\Gamma_2 + \Gamma_4,\ 2\Gamma_3 + \Gamma_2,\ 2\Gamma_5 + \Gamma_6,\ 2\Gamma_6 + \Gamma_4,\ 2\Gamma_7 + \Gamma_2,$$
$$\Gamma_1 + \Gamma_3 + \Gamma_4,\ \Gamma_1 + \Gamma_2 + \Gamma_5,\ \Gamma_4 + \Gamma_5 + \Gamma_7,\ \Gamma_3 + \Gamma_6 + \Gamma_7.$$

Les hyperplans passant par la courbe Γ_1 par exemple, découpent sur Φ le système adjoint à Γ_7, qui est ∞^2. La courbe Γ_1 appartient donc à un espace S_3 à trois dimensions. Il en est de même des courbes $\Gamma_2, \Gamma_3, \ldots, \Gamma_7$ et deux des courbes $\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_7$ se rencontrant en deux points.

On obtient ainsi une nouvelle *surface de genres* $p_a = p_g = 0$, $p^{(1)} = P_2 = 3$, $P_3 = 7$, $P_4 = 13, \ldots$ (1).

Liège, le 23 juillet 1949.

(1) On sait que M. CAMPEDELLI avait déjà établi l'existence d'un plan double de genres $p_a = p_g = 0$, $p^{(1)} = P_2 = 3$. La courbe de diramation de ce plan double est une courbe d'ordre dix possédant six couples de points triples infiniment voisins. M. CAMPEDELLI prend pour cette courbe l'ensemble de trois coniques deux à deux bitangentes et d'une quartique touchant les coniques aux six points de contact (REND. ACCAD. DEI LINCEI, 1° sem. 1932).