Extrait du *Bulletin de l'Académie royale de Belgique* (Classe des Sciences)
Séance du 4 janvier 1947.

GÉOMÉTRIE ALGÉBRIQUE

Recherches sur la construction de surfaces algébriques irrégulières,

par Lucien GODEAUX,
Membre de l'Académie.

(*Deuxième note*)

Dans notre première note (¹), nous avons considéré une courbe de genre π contenant une involution cyclique du troisième ordre et de genre π', nous en avons déduit la construction d'une surface d'irrégularité π'. Dans cette seconde note, nous allons supposer $\pi' = 1$. Une surface d'irrégularité un possède, comme on sait, un faisceau elliptique de courbes ; notre but est de construire ce faisceau sur la surface construite.

1. Soit L une courbe de genre $\pi (\pi > 3)$ contenant une involution cyclique elliptique i_3, d'ordre trois. Appelons F la surface représentant les couples de points de la courbe L, Φ la surface représentant les couples de points d'une courbe elliptique L', image de l'involution i_3.

Considérons deux groupes de l'involution i_3, $P_1P_2P_3$ et $Q_1Q_2Q_3$; soient P', Q' les points qui les représentent sur L'. Désignons par R_{ik} le point de la surface F qui représente le couple P_iQ_k de L et par R' le point qui représente le couple P'Q' de L' sur la surface Φ. Considérons sur la surface F le groupe de points

$$\begin{array}{lll} R_{11}, & R_{22}, & R_{33}, \\ R_{12}, & R_{23}, & R_{31}, \\ R_{13}, & R_{21}, & R_{32}. \end{array} \qquad (1)$$

(¹) Bulletin de l'Académie, janvier 1947.

Ces points forment un groupe de l'involution I_9, représentée par la surface Φ. La transformation que nous avons désignée par T dans notre première note, engendre sur F une involution I_3, d'ordre trois ; le groupe (1) contient trois groupes de I_3, les points d'un même groupe étant sur une même horizontale. La surface F', image de l'involution I_3, a actuellement l'irrégularité $q = 1$. Au groupe (1) correspond sur F' un groupe de trois points, que nous désignerons par R'_1, R'_2, R'_3, engendrant une involution I'_3 représentée par la surface Φ.

2. La surface F' ayant l'irrégularité $q = 1$, possède, comme on sait, un faisceau elliptique de courbes. Nous allons construire ce faisceau.

Rappelons que la surface Φ est une réglée elliptique dont les génératrices unicursales Γ correspondent aux séries g_2^1 de la courbe L'.

Aux courbes Γ, qui forment sur Φ un faisceau elliptique, correspondent sur F' des courbes G' et sur F des courbes G, formant des faisceaux ellitiques. Nous allons déterminer les genres des courbes G, G'.

Supposons que les points P', Q' forment un couple d'une série linéaire déterminée g_2^1 de L', représentée par la courbe rationnelle Γ. Les points P_1, P_2, ..., Q_3 décrivent sur L une série linéaire g_6^1 et les points (1) décrivent sur la courbe G homologue de Γ une série linéaire g_9^1 d'ordre 9. Cherchons à déterminer les points doubles de cette dernière série.

Deux points du tableau (1) ne peuvent coïncider que dans deux circonstances :

1° Les points P' et Q' coïncident en un point double de la série g_2^1 sur L' ;

2° Les points P_1, P_2, P_3 (ou Q_1, Q_2, Q_3) coïncident en un point triple de l'involution i_3.

Plaçons-nous dans la première hypothèse. Les points P_1, P_2, P_3 coïncident dans un certain ordre avec les points Q_1, Q_2, Q_3. Si nous désignons par P_{ik} le point de F qui représente le couple P_i, P_k de L, le groupe (1) devient

$$\begin{matrix} P_{11}, & P_{22}, & P_{33}, \\ P_{12}, & P_{23}, & P_{31}, \\ P_{13}, & P_{21}, & P_{32}. \end{matrix} \qquad (2)$$

Les points de la troisième ligne coïncident dans un certain ordre avec ceux de la seconde et le groupe correspondant de la série g_9^1 sur G comprend trois points doubles Comme la série g_2^1 sur L' possède quatre points doubles, on trouve ainsi 12 points doubles de cette série.

Envisageons la seconde hypothèse. Nous pouvons supposer que les points Q_1, Q_2, Q_3 coïncident en un point Q_1, F représentant les couples de points non ordonnés de la courbe L. Alors, les points du tableau (1) se réduisent aux points de la première ligne et on a en correspondance trois points triples de la série g_9^1 sur G.

L'involution i_3 étant elliptique, possède $\delta = \pi - 1$ points triples et on a donc $3(\pi - 1)$ points triples de la série g_9^1, équivalents à $6(\pi - 1)$ points doubles.

Si x est le genre de la courbe G, on a

$$2(9 + x - 1) = 6\delta + 12,$$

d'où $x = 3\delta - 2 = 3(\pi - 1) - 2$. Les courbes G sont de genre $3(\pi - 1) - 2$.

3. Le genre de la courbe G' se détermine de la même manière. Aux points du tableau (1) correspond, sur la courbe G', un groupe d'une série linéaire g_3^1 d'ordre trois. Cette série possède quatre points doubles, correspondant aux points doubles de la série g_2^1 sur L' et δ points triples, correspondant aux points triples de l'involution i_3 sur L. Si l'on désigne par x' le genre de la courbe G', on a donc

$$2(3 + x' - 1) = 2\delta + 4,$$

d'où $x' = \delta = \pi - 1$. Les courbes G' sont de genre $\pi - 1$.

Entre les courbes G' et G, nous avons une correspondance (1,3) privée de points unis. La formule de Zeuthen, appliquée à cette correspondance, donne une confirmation des résultats précédents.

La surface F' contient donc un faisceau elliptique de courbes G' de genre $\pi - 1$.

4. Nous allons maintenant déterminer le nombre de points de rencontre des courbes G, G' avec les courbes canoniques respectivement de F et de F'.

Une courbe canonique C de F représente les couples de points d'une série $g^1_{2\pi-2}$ canonique. D'après la formule de Schubert, cette série et la série g^1_6 considérée tantôt sur la courbe L, ont en commun $9\pi - 15$ couples de points. Soient P_1, P_2, P_3 et Q_1, Q_2, Q_3 les points (formant deux groupes de i_3) contenant un de ces couples. Ce couple peut être formé d'un point P et d'un point Q_1 et alors il lui correspond sur F un point commun à la courbe G et à la courbe C, ou bien être formé de deux points P, ou de deux points Q. Ces points doivent être écartés. Le nombre de couples communs à la série $g^1_{2\pi-2}$ et à l'involution i_3 est, d'après la formule de Schubert, égal à $3\pi - 3$. Il en résulte que les courbes G rencontrent les courbes canoniques de F en $6(\pi - 2)$ points.

En particulier, si la courbe C est l'homologue d'une courbe canonique C' de F' et appartient donc à l'involution I_3, ce groupe de $6(\pi - 2)$ points est formé de groupes de I_3, homologues des points communs à une courbe C' et à une courbe G'. Ces dernières rencontrent donc les courbes canoniques C' en $2(\pi - 2)$ points.

Sur le modèle canonique de la surface F', *existe donc un faisceau elliptique de courbes d'ordre* $2(\pi - 2)$ *et de genre* $\pi - 1$.

5. Appelons K_0 la courbe de la surface F qui repré-

sente les couples de points de la courbe L formés de deux points confondus. La courbe K_0 est donc de genre π et rencontre les courbes canoniques C de F en $6(\pi - 1)$ points.

Appelons ensuite L_0 la courbe de F qui représente les couples de points appartenant à un groupe de i_3. Reprenons le groupe (1) et faisons tendre le point Q′ vers le point P′, ces deux points étant d'ailleurs quelconques sur L′. Alors le groupe (1) tend vers le groupe (2). Les points de la première ligne de ce groupe tendent vers trois points de K_0 et les points des deux dernières lignes, qui sont confondus dans un certain ordre, tendent vers des points de L_0. Aux trois premiers points correspondent, sur F′, un point décrivant une courbe K'_0 et aux trois derniers, un point décrivant une courbe L'_0. La courbe L'_0 est unie pour l'involution I'_3 (non cyclique) appartenant à F′ et aux courbes K'_0, L'_0 correspond, sur Φ, la courbe qui représente les couples de points de L′ formés de deux points confondus. Cette courbe est elliptique et il en est de même des courbes K'_0, L'_0.

La courbe L_0 passe par les points unis de l'involution I_3 homologues des points unis de i_3 comptés deux fois. Il en résulte que la courbe L_0 est de genre π. Cette courbe rencontre les courbes canoniques en $3(\pi - 1)$ points.

6. Examinons pour terminer un cas particulier. Considérons dans S_4 l'homographie τ de période trois

$$\frac{x'_0}{x_0} = \frac{x'_1}{\epsilon x_1} = \frac{x'_2}{\epsilon x_2} = \frac{x'_3\mathbf{6}}{\epsilon^2 x_3} = \frac{x'_4}{\epsilon^2 x_4},$$

où ϵ est une racine cubique primitive de l'unité. Elle possède trois axes ponctuels, le point O_0 (1, 0, 0, 0, 0), la droite O_1O_2 ($x_0 = x_3 = x_4 = 0$) et la droite O_3O_4 ($x_0 = x_1 = x_2 = 0$). Considérons la courbe canonique de genre cinq, d'équations

$$a_0 x_2^0 + a_{13} x_1 x_3 + a_{14} x_1 x_4 + a_{23} x_2 x_3 + a_{24} x_2 x_4 = 0,$$
$$x_0(a_1 x_1 + a_2 x_2) + b'_2 x_3 x_4 = 0,$$
$$x_0(b_3 x_3 + b_4 x_4) + a'_2 x_1 x_2 = 0.$$

Elle est transformée en elle-même par τ et cette homographie engendre sur la courbe une involution i_3 possédant quatre points triples O_1, O_2, O_3, O_4 et par conséquent elliptique. Prenons cette courbe pour courbe L. La surface F a les genres

$$p_a = 5, \ p_g = 10, \ p^{(1)} = 5.$$

L'involution I_3 existant sur cette surface possède deux points unis parfaits, correspondant aux couples O_1O_2, O_3O_4 et huit points unis non parfaits, correspondant aux couples O_1O_1, O_2O_2, O_3O_3, O_4O_4, O_1O_3, O_1O_4, O_2O_3, O_2O_4. La surface F′ a les genres

$$p'_a = 3, \quad p'_g = 4, \quad p'^{(1)} = 25.$$

Le modèle canonique de cette surface appartient donc à l'espace ordinaire ; c'est une surface d'ordre 24 et d'irrégularité $q = 1$.

Il existe sur cette surface un faisceau elliptique de courbes G′, d'ordre six et de genre quatre.

La courbe L'_0 est elliptique et rencontre les courbes G′ en 12 points. Il en est de même de la courbe K'_0. En effet, une courbe G′ contient une série linéaire d'ordre trois représentée par la courbe Γ homologue et cette série possède 12 points doubles.

La courbe L_0 rencontre les courbes canoniques C de F en 12 points ; à ces 12 points correspondent, lorsque la courbe C est la transformée d'une courbe canonique C′ de F′, 12 points communs à la courbe L'_0 et à C′. La courbe L'_0 est donc une courbe elliptique du douzième ordre.

Liége, le 2 janvier 1947.