Extrait du *Bulletin de l'Académie royale de Belgique* (Classe des Sciences)
Séance du 11 octobre 1947.

GÉOMÉTRIE ALGÉBRIQUE

Sur les correspondances rationnelles entre deux surfaces algébriques régulières,

par Lucien GODEAUX,
Membre de l'Académie.

Nous continuons dans cette note nos recherches sur les involutions cycliques n'ayant qu'un nombre fini de points unis, appartenant à une surface algébrique [1]. D'une manière précise, nous considérons une involution cyclique I_p d'ordre p, n'ayant qu'un nombre fini de points unis, appartenant à une surface algébrique régulière F. Nous montrons que s'il existe un système linéaire appartenant à l'involution n'ayant pas pour points-base les points unis de celle-ci, l'adjoint à ce système contient p systèmes linéaires partiels appartenant à l'involution. Nous en faisons quelques applications, notamment à la construction de systèmes linéaires que nous appelons « pseudo-canoniques » sur la surface image de l'involution. Nous montrons également que tous les systèmes linéaires de courbes tracées sur la surface F et transformés en eux-mêmes par la transformation birationnelle de F en soi génératrice de l'involution, se comportent de la même manière vis-à-vis des points unis de celle-ci.

1. Soit F une surface algébrique régulière, de genres $p_g = p_a > 0$, contenant une involution cyclique I_p, d'ordre premier p, n'ayant qu'un nombre fini de points unis. Nous désignerons par T la transformation bira-

(1) Nous avons exposé nos recherches sur cet objet dans un opuscule : *Les involutions cycliques appartenant à une surface algébrique*. Actualités scient. et indust., n° 270. Paris, Hermann, 1935.

tionnelle de F en soi, génératrice de l'involution I_p et par Φ une surface image de cette involution.

Construisons sur F un système linéaire $| C |$, transformé en lui-même par T et contenant des courbes transformées en elles-mêmes par T et ne passant par aucun point uni de I_p [1]. Considérons une de ces dernières courbes, soit C_1 et désignons par Γ_1 la courbe qui lui correspond sur Φ.

Si π est le genre de Γ_1, la courbe C_1 et les courbes C sont de genre $p(\pi - 1) + 1$.

Le système canonique de F, qui existe certainement puisque par hypothèse $p_g > 0$, est transformé en lui-même par T, donc l'adjoint $| C' |$ à $| C |$ est transformé en lui-même par T. D'après le théorème de Picard, le système $| C' |$ a la dimension

$$p_a + p(\pi - 1)$$

et découpe sur une courbe C et en particulier sur la courbe C_1, la série canonique complète de cette courbe.

La série canonique de la courbe C_1 contient p séries linéaires partielles appartenant à l'involution I_p. A ces séries correspondent, sur la courbe Γ_1, p séries linéaires complètes d'ordre $2\pi - 2$. La première est la série canonique de Γ_1 et a la dimension $\pi - 1$; les $p - 1$ autres séries sont des séries paracanoniques de Γ_1 et ont la dimension $\pi - 2$.

Le système $| C' |$ contient un certain nombre ν de systèmes linéaires partiels $| C'_1 |$, $| C'_2 |$, ..., $| C'_\nu |$ appartenant à l'involution I_p. A ces systèmes correspondent, sur Φ, des systèmes linéaires complets $| \Gamma'_1 |$, $| \Gamma_2 |$, ..., $| \Gamma'_\nu |$. L'un de ces systèmes est l'adjoint à $| \Gamma_1 |$; nous supposerons que c'est $| \Gamma'_1 |$. Il découpe, sur la courbe Γ_1, la série canonique complète et, d'après le théorème de Picard, il a la dimension $p'_a + \pi - 1$, p'_a étant le genre arithmétique de Φ.

[1] Voir par exemple notre exposé sur *Les involutions*... (loc. cit.)

Les autres systèmes $|\Gamma'_2|$, $|\Gamma'_3|$, ..., $|\Gamma'_\nu|$ découpent, sur Γ_1, des groupes paracanoniques, appartenant à $\nu - 1$ des séries paracanoniques dont il a été question plus haut.

Si $\nu < p$, il existe sur la courbe C_1 au moins un groupe canonique G appartenant à l'involution I_p et qui n'appartient à aucune courbe adjointe C' transformée en elle-même par T.

Considérons une adjointe C' passant par G, ce qui est toujours possible puisque $p_a > 0$. La transformation T fait correspondre à cette adjointe une autre adjointe passant également par G, puisque ce groupe est transformé en lui-même par T. Par conséquent, T transforme en lui-même le système linéaire des adjointes passant par G ; il existe donc des adjointes de ce système transformées en elles-mêmes par T et nous sommes conduit à une contradiction. On en conclut $\nu = p$ et de plus, les systèmes $|\Gamma'_2|$, $|\Gamma'_3|$, ..., $|\Gamma'_p|$ découpent, sur la courbe Γ_1, des séries paracanoniques complètes.

Le système adjoint $|C_1|$ *contient* p *systèmes linéaires partiels appartenant à l'involution* I_p.

2. Le système $|\Gamma'_1|$, adjoint à $|\Gamma_1|$, a la dimension $p'_a + \pi - 1$. Nous venons de voir que les systèmes $|\Gamma'_2|$, $|\Gamma'_3|$, ..., $|\Gamma'_p|$ ont une dimension au moins égale à $\pi - 2$. Désignons par $\pi - 2 + \epsilon_i$ la dimension de $|\Gamma'_i|$, ϵ_i étant un nombre positif ou nul.

La transformation T agit sur les courbes C' comme une homographie sur les points d'un espace à $p_a + p(\pi - 1)$ dimensions, les axes ponctuels correspondant aux systèmes $|C'_1|$, $|C'_2|$, ..., $|C'_p|$. Par conséquent, on a

$$p'_a + \pi - 1 + (p - 1)(\pi - 2) + \epsilon_2 + \epsilon_3 + \dots$$
$$+ \epsilon_p + p = p_a + p(\pi - 1) + 1,$$

c'est-à-dire

$$\epsilon_2 + \epsilon_3 + \dots + \epsilon_p = p_a - p'_a.$$

3. Nous pouvons choisir le système $|C|$ de manière qu'il contienne p systèmes linéaires partiels $|C_1|$, $|C_2|$, ..., $|C_p|$ appartenant à l'involution I_p, le premier, $|C_1|$, étant dépourvu de points-base [1]. Les autres systèmes, $|C_2|$, $|C_3|$, ..., $|C_p|$ ont pour points-base les points unis de I_p.

Aux systèmes $|C_1|$, $|C_2|$, ..., $|C_p|$ correspondent sur Φ des systèmes linéaires complets $|\Gamma_1|$, $|\Gamma_2|$, ..., $|\Gamma_p|$.

L'adjoint à l'un des systèmes $|\Gamma_2|$, $|\Gamma_3|$, ..., $|\Gamma_p|$ a pour homologue, sur F, un système formé de courbes découpant sur les courbes C_2, C_3, ..., C_p homologues, la série canonique, donc aux adjoints aux systèmes $|\Gamma_2|$, $|\Gamma_3|$ ..., $|\Gamma_p|$ correspondent sur F des systèmes linéaires appartenant à $|C'|$. Il en résulte que l'on peut numéroter les systèmes $|\Gamma_2|$, $|\Gamma_3|$, ..., $|\Gamma_p|$ de manière que leurs adjoints soient respectivement $|\Gamma'_2|$, $|\Gamma'_3|$, ..., $|\Gamma'_p|$. Nous avons déjà supposé que $|\Gamma'_1|$ était l'adjoint à $|\Gamma_1|$.

Soient π_2, π_3, ..., π_p les genres respectifs des courbes Γ_2, Γ_3, ..., Γ_p.

Entre une courbe Γ_2 et la courbe C_2 homologue, nous avons une correspondance $(1, p)$ possédant des points unis, puisque les courbes C_2 passent par les points unis de I_p. Le genre d'une courbe C_2 est en plus égal à celui d'une courbe C et par conséquent, le genre π_2 de Γ_2 est inférieur au genre π de Γ_1. De même, π_3, π_4, ..., π_p sont inférieurs à π.

Le système $|\Gamma'_i|$, adjoint à $|\Gamma_i|$ $(i \geqslant 2)$, a d'une part la dimension $p'_a + \pi_i - 1$ et d'autre part, la dimension $\pi - 2 + \epsilon_i$. On a donc

$$\epsilon_i = p'_a + \pi_i - \pi + 1.$$

En portant ces valeurs dans la formule obtenue plus haut, on a

$$\pi_2 + \pi_3 + \ldots + \pi_p - (p-1)\pi = p_a + 1 - p(p'_a + 1).$$

[1] Voir par exemple *Les involutions ...* (loc. cit.)

Or, on a [1]

$$12(p_a + 1) = 12p(p'_a + 1) + \Delta,$$

où Δ est un nombre qui provient de la présence de points unis de I_p. On a donc

$$\Delta = 12(\pi_2 + \pi_3 + \ldots + \pi_p) - 12(p - 2)\pi.$$

On en déduit $\Delta \leqslant 0$.

4. Le système $|\Gamma'_1 - \Gamma_1|$ est le système canonique de Φ. Considérons, s'il existe, le système $|\Gamma'_2 - \Gamma_1|$. Le système $|\Gamma'_2|$ ayant la dimension $\pi - 2 + \epsilon_2$, les courbes Γ'_2 qui contiennent une courbe Γ_1 doivent passer par $\pi - 1$ points de cette courbe et le système $|\Gamma'_2 - \Gamma_1|$ a la dimension $\epsilon_2 - 1$.

De même, les systèmes $|\Gamma'_3 - \Gamma_1|$, $|\Gamma'_4 - \Gamma_1|$, ..., $|\Gamma'_p - \Gamma_1|$, s'ils existent, ont respectivement les dimensions $\epsilon_3 - 1$, $\epsilon_4 - 1$, ..., $\epsilon_p - 1$.

Les transformés de ces systèmes, sur F, appartiennent au système canonique de cette surface.

Désignons par $|L|$ le système canonique de F, par $|\Lambda_1|$, $|\Lambda_2|$, ..., $|\Lambda_p|$ les systèmes $|\Gamma'_1 - \Gamma_1|$, $|\Gamma'_2 - \Gamma_1|$, ..., $|\Gamma'_p - \Gamma_1|$, dont plusieurs peuvent être virtuels, par $|L_1|$, $|L_2|$, ..., $|L_p|$ leurs transformés sur F.

Les systèmes $|\Lambda_2|$, $|\Lambda_3|$, ..., $|\Lambda_p|$ pourraient être appelés les systèmes « pseudo-canoniques » de Φ.

Nous avons, pour $i \geqslant 2$,

$$\pi_i = \pi - 1 - p'_a + \epsilon_i < \pi,$$

d'où

$$\epsilon_i - 1 < p'_a.$$

Les systèmes $|\Lambda_2|$, $|\Lambda_3|$, ..., $|\Lambda_p|$, s'ils existent, ont donc la dimension inférieure à p'_a (comme d'ailleurs le système canonique $|\Lambda_1|$).

---

[1] *Les involutions*... (loc. cit.).

Observons que les systèmes

$$|\Gamma'_1 - \Gamma_i|,\ |\Gamma'_2 - \Gamma_i|,\ \ldots,\ |\Gamma'_i - \Gamma_i|,\ \ldots,\ |\Gamma'_p - \Gamma_i|,$$

pour $i \geqslant 2$, coïncident, dans un certain ordre, avec les systèmes canoniques et pseudocanoniques.

5. Il convient de remarquer que si l'un des nombres $\pi_2, \pi_3, \ldots, \pi_p$ est égal à π, il en est de même des autres et l'involution est alors privée de points unis. Dans ce cas on a $\epsilon_i - 1 = p'_a$; tous les systèmes pseudo-canoniques existent et ont la dimension p'_a, supérieure à celle, $p'_a - 1$, du système canonique de la surface Φ.

6. Entre les systèmes $|\Gamma_1|$ et $|\Gamma_2|$ par exemple, nous avons la relation fonctionnelle [1]

$$p\Gamma_1 \equiv p\Gamma_2 + \Delta_2,$$

où Δ_2 représente une somme algébrique des composantes des points de diramation de la surface Φ.

On a, en prenant les adjoints des deux membres,

$$\Gamma'_1 + (p-1)\Gamma_1 \equiv \Gamma'_2 + (p-1)\Gamma_2 + \Delta_2,$$

d'où

$$\Lambda_1 + (p-1)\Gamma_1 \equiv \Lambda_2 + (p-1)\Gamma_2 + \Delta_2.$$

En prenant de nouveau les adjoints des deux membres, on a

$$\Lambda_1 + (p-2)\Gamma_1 + \Gamma'_1 \equiv \Lambda_2 + (p-2)\Gamma_2 + \Gamma'_2 + \Delta_2,$$

d'où

$$2\Lambda_1 + (p-2)\Gamma_1 \equiv 2\Lambda_2 + (p-2)\Gamma_2 + \Delta_2.$$

En continuant de même à utiliser le théorème d'adjonction, on arrive finalement à la relation

$$p\Lambda_1 \equiv p\Lambda_2 + \Delta_2.$$

(1) *Les involutions*... (loc. cit.).

Comme les systèmes canonique et pseudo-canoniques de Φ sont obtenus en partant d'un système $|\Gamma|$ ou d'un système $|C|$ quelconque, satisfaisant aux conditions imposées plus haut, on en conclut que *tous les systèmes linéaires de courbes tracées sur* F *ont le même comportement aux points unis de l'involution.*

7. Il convient d'observer que le transformé $|C'_1|$ sur F de l'adjoint $|L'_1|$ à $|L_1|$ peut avoir pour points-base les points unis de l'involution I_p. Il se peut en effet que la surface Φ ait, en certains points de diramation, des singularités qui influent sur le système canonique de Φ. La série linéaire découpée sur une courbe C_2 par les courbes C'_1 sera alors d'ordre inférieur à $2\pi - 2$.

Liège le 2 septembre 1947.