Extrait du *Bulletin de l'Académie royale de Belgique* (Classe des Sciences)
Séance du samedi 10 avril 1948.

GÉOMÉTRIE ALGÉBRIQUE

Recherches sur les points unis isolés des involutions cycliques appartenant à une surface algébrique,

par Lucien GODEAUX,
Membre de l'Académie.

(Deuxième communication) (1)

16. Reprenons l'involution I_p, d'ordre premier impair p, appartenant à la surface algébrique F et le système complet $|C|$ contenant les p systèmes linéaires $|C_0|$, $|C_1|, \dots, |C_{p-1}|$ appartenant à l'involution. $|C_0|$ est dépourvu de points-base et en rapportant projectivement les courbes C_0 aux hyperplans d'un espace linéaire de même dimension que $|C_0|$, on obtient une surface normale Φ, d'ordre n, à sections hyperplanes de genre π, image de l'involution I_p.

Soient A un point uni non parfait de l'involution I_p et A_0 le point de diramation qui lui correspond sur Φ. Nous avons désigné par $|C_0'|$, $|C_0''|$, ..., $|C_0^{(\nu)}|$ les systèmes linéaires formés des courbes C_0 passant par A, des courbes C_0' touchant en A une droite distincte des tangentes unies pour I_p, située dans le plan α tangent à F en A, ..., des courbes $C_0^{(\nu-1)}$ touchant en A une droite analogue à la précédente. Les courbes C_0', C_0'', ..., $C_0^{(\nu-1)}$ ont en A des tangentes confondues avec les tangentes unies ; les courbes $C_0^{(\nu)}$ ont en A un point multiple d'ordre p à tangentes variables. Appelons Γ_0, Γ_0', ..., $\Gamma_0^{(\nu)}$ les courbes qui correspondent sur Φ aux courbes C_0, C_0', ..., $C_0^{(\nu)}$. Les courbes Γ_0 sont donc les sections hyperplanes de la surface Φ.

(1) La première communication a été publiée dans le BULL. DE L'ACADÉMIE, 1948, pp. 206-228.

Projetons Φ de A_0 sur un hyperplan ne contenant pas ce point ; nous obtenons une surface Φ' dont les sections hyperplanes correspondent aux courbes C_0' et sont donc les courbes Γ_0'. Sur cette surface, les courbes Γ_0'' sont découpées par les hyperplans passant par un point A_0' de la surface. Projetons Φ' de A_0' sur un hyperplan ne passant pas par ce point ; nous obtenons une surface Φ_0'' dont les sections hyperplanes sont les courbes Γ_0''. Et ainsi de suite. Nous obtenons ainsi une suite de surfaces Φ, Φ',..., $\Phi^{(\nu)}$ dont les sections hyperplanes sont respectivement les courbes Γ_0, Γ_0',..., $\Gamma_0^{(\nu)}$.

Si n_i est l'ordre de la surface $\Phi^{(i)}$, le degré de $|C_0^{(i)}|$ est égal à pn_i et deux courbes $C_0^{(i)}$ ont $p\,(n - n_i)$ points d'intersection absorbés en A. Comme les courbes $C_0^{(i+1)}$ sont des courbes $C_0^{(i)}$ particulières, deux courbes $C_0^{(i)}$, $C_0^{(i+j)}$ ont également $p(n - n_i)$ points d'intersection absorbés en A.

Entre une courbe $\Gamma_0^{(i)}$ et une courbe $C_0^{(i)}$, nous avons une correspondance $(1, p)$ dont les points unis sont infiniment voisins de A. La formule de Zeuthen donne une relation entre les genres de ces courbes.

17. Nous allons utiliser les remarques précédentes pour étudier complètement le comportement des courbes C_0', C_0'', ... dans l'hypothèse $k = 2$, c'est-à-dire lorsque le plan tangent à F en A s'appuie en un point A_1 sur l'espace $S^{(1)}$, axe de l'homographie H génératrice de I_p et en un point A_2 sur l'axe $S^{(2)}$.

Posons comme précédemment $p = 2\eta + 1$ et rappelons que dans la première communication, nous avons établi que :

Les courbes C_1 passent simplement par A en y touchant la droite AA_2.

Les courbes C_2 passent simplement par A en y touchant la droite AA_1.

Les courbes C_{2i} ont un point multiple d'ordre i en A, les i tangentes étant confondues avec la droite AA_1.

Les courbes C_{2i+1} ont un point multiple d'ordre $i + 1$ en A, i tangentes étant confondues avec AA_1 et la dernière avec AA_2.

Les courbes C'_0 ont en A la multiplicité $\eta + 1$, η tangentes étant confondues avec AA_1 et une avec AA_2.

Les courbes $C_0^{(i+1)}$ ont un point multiple d'ordre $\eta + i + 1$ en A, $\eta - i$ tangentes étant confondues avec AA_1 et $2\,i + 1$ avec AA_2.

Les courbes C_1 devant rencontrer les courbes C'_0 en $p = 2\,\eta + 1$ points confondus en A, ces dernières courbes ont en commun η points $A_{21}, A_{22}, \ldots, A_{2\eta}$ simples, infiniment voisins successifs de A, le premier, A_{21}, appartenant à la droite AA_2. Le dernier point, $A_{2\eta}$, est uni parfait pour I_p et il lui correspond une droite sur la surface Φ'.

Les courbes $C_0^{(\eta)}$ ont la multiplicité 2η en A, $2\eta - 1$ tangentes étant confondues avec AA_2 et une avec AA_1. Une courbe C_2 doit rencontrer une courbe $C_\eta^{(0)}$ en p points confondus en A, donc ces courbes ont en commun un seul point A_{11} infiniment voisin de A sur la droite AA_1, simple par les deux courbes. De même, les courbes $C_0^{(\eta)}$ ont un point simple en A_{21} et ne passent pas par A_{22}.

Les courbes $C_0^{(\eta+1)}$ ont en A un point multiple d'ordre p à tangentes variables ; on a donc $\nu = \eta + 1$ et la surface $\Phi^{(\eta+1)}$ a l'ordre $n - p$. Par conséquent, la surface $\Phi^{(\eta)}$ a l'ordre au moins égal à $n - p + 1$, la surface $\Phi^{(\eta-1)}$ l'ordre au moins égal à $n - p + 2\ldots$, la surface Φ' l'ordre au moins égal à $n - \eta - 1$. Il en résulte que deux courbes C'_0 ont au plus $(\eta + 1)\,p$ points d'intersection absorbés en A. Par conséquent, une courbe C'_0 et une courbe $C_0^{(\eta)}$ ont au plus $(\eta + 1)\,p$ points d'intersection absorbés en A. Soit x le nombre de points d'intersection de ces deux courbes absorbés en A_{11} et aux points infiniment voisins de ces points appartenant éventuellement aux deux courbes. On a

$$2\eta\ (\eta + 1) + 1 + x \leqslant (\eta + 1)\ (2\eta + 1).$$

le premier membre de cette relation étant multiple de p. On en déduit $x \leqslant \eta$. D'autre part, $x - \eta$ doit être divisible par p, ce qui exige $x = \eta$. Mais alors, la surface Φ' est exactement d'ordre $n - \eta - 1$ et A_0 est multiple d'ordre $\eta + 1$ pour Φ. Ou encore, au domaine du point A_0 correspond sur Φ' une courbe d'ordre $\eta + 1$. Cette courbe comprend comme partie la droite qui correspond aux points infiniment voisins de $A_{2\eta}$, que nous avons rencontrée plus haut.

La surface Φ' étant d'ordre $n - \eta - 1$, la surface Φ'' est d'ordre $n - \eta - 2$, ..., la surface $\Phi^{(\eta)}$ d'ordre $n - 2\eta$. Il en résulte que l'on passe d'une de ces surfaces à la suivante en la projetant d'un de ses points simples ; par suite, les courbes Γ'_0, Γ''_0,..., $\Gamma^{(\eta)}_0$ ont le même genre.

Une courbe $C^{(\eta)}_0$ est de genre $p\,(\pi - 1) + 1 - \eta\,(2\eta - 1)$. L'involution déterminée sur cette courbe par I_p est représentée par une courbe $\Gamma^{(\eta)}_0$ et possède deux points unis, puisque sur la courbe $C^{(\eta)}_0$, A est l'origine de deux branches qui se terminent par des points simples. Si x est le genre de $\Gamma^{(\eta)}_0$, on a, par la formule de Zeuthen,

$$2p(x - 1) + 2(p - 1) = 2p(\pi - 1) - 2\eta(2\eta - 1),$$

d'où $x = \pi - \eta$. Tel est aussi le genre des courbes Γ'_0.

Puisque Φ' est d'ordre $n - \eta - 1$, deux courbes C'_0 ont $p\,(\eta + 1)$ points d'intersection absorbés en A. De plus, l'involution déterminée par I_p sur une courbe C'_0 possède $\eta + 1$ points unis et est de genre $\pi - \eta$. Supposons que le point A_{11} soit multiple d'ordre ρ pour les courbes C'_0 et que les points infiniment voisins de A_{11} communs à ces courbes aient pour celles-ci les multiplicités ρ_1, ρ_2,.... On a

$$\Sigma\,\rho^2 = \eta^2, \qquad \Sigma\,\rho\,(\rho - 1) = \eta\,(\eta - 1),$$

d'où $\Sigma\rho = \eta$. Mais les courbes C_2 doivent rencontrer les courbes C'_0 en p points confondus en A, donc les points infiniment voisins de A_{11} appartenant à ces courbes sont tous situés sur les courbes C_2. Mais alors, comme les courbes $C^{(\eta)}$, ne passent que par A_{11}, on a nécessairement $\rho = \eta$, $\rho_2 = \rho_2 = \ldots = 0$. Le point A_{11} est par conséquent uni parfait pour l'involution I_p.

18. Dans un travail antérieur, nous avons étudié les points unis d'une involution ayant, dans leur domaine du premier ordre, un point uni parfait (¹). Nous avons montré que la surface Φ possède en A_0, un point multiple d'ordre $\eta + 1$, le cône tangent étant dégénéré en un plan et un cône d'ordre η, rationnel, ayant une seule de ses génératrices dans le plan. Si l'on projette Φ de A_0 sur Φ', au domaine du point A_0 correspond l'ensemble d'une droite s_1 (représentant le domaine de $A_{2\eta}$) et une courbe γ, rationnelle, d'ordre η, (représentant le domaine de A_{11}). La droite et la courbe se coupent en un point A'_0, simple pour la surface Φ'. En projetant Φ' de A'_0 sur un hyperplan, on obtient la surface Φ'', sur laquelle à la courbe γ correspond une courbe γ' d'ordre $\eta - 1$. Et ainsi de suite.

Nous allons compléter nos résultats en déterminant le comportement des courbes C''_0, $C'''_0, \ldots, C^{(\eta)}_0$ en A.

Commençons par étudier les courbes $C^{(\eta)}_0$. Nous avons vu qu'elles ont un point multiple d'ordre 2η en A et passent simplement par A_{11}, A_{21}. Le premier de ces points est uni parfait pour I_p ; il n'en est pas de même du second. A ce point, sont infiniment voisins deux points unis : A_{22}, situé sur les courbes C'_0, C_1 et, dans une autre direction, A'_1. La surface $\Phi^{(\eta)}$ étant d'ordre $n - 2\eta$, deux courbes $C^{(\eta)}$ ont en commun $2\eta\,(2\eta + 1)$ points d'intersection absorbés en A. On en conclut qu'il y a $2\,(\eta - 1)$ points A'_1, A'_2, ..., $A'_{2(\eta-1)}$ infiniment

(¹) *Recherches sur les involutions cycliques appartenant à une surface algébrique.* (Bull. de l'Académie roy. de Belgique, 1930, pp. 450-467).

voisins successifs de A_{21}, unis par I_p, par lesquels les courbes $C_0^{(\eta)}$ passent simplement. Le dernier de ces points, $A'_{2(\eta-1)}$, est uni parfait pour I_p ; à son domaine correspond sur $\Phi^{(\eta)}$ une droite s_η. Au domaine du point A_{11} correspond sur $\Phi^{(\eta)}$ une droite $\gamma^{(\eta-1)}$ qui est évidemment la projection de la courbe γ. Aux courbes $C_0^{(\eta+1)}$ correspondent sur $\Phi^{(\eta)}$ des courbes découpées par les hyperplans passant par un point $A_0^{(\eta)}$, commun aux droites s_η, $\gamma^{(\eta-1)}$.

Considérons maintenant les courbes $C_0^{(\eta-1)}$. Elles ont en A la multiplicité $2\eta - 1$, deux tangentes confondues avec AA_1 et $2\eta - 3$ avec AA_2. Ces courbes ont donc un point double en A_{11}. Elles doivent être rencontrées en p points confondus en A par les courbes C_1, par conséquent, elles ont un point double en A_{21}, ou elles passent simplement par A_{21}, A_{22}. La surface $\Phi^{(\eta-1)}$ étant d'ordre $n - 2\eta + 1$, deux courbes $C_0^{(\eta-1)}$, ou une courbe $C_0^{(\eta-1)}$ et une courbe $C_0^{(\eta)}$ ont $(2\eta - 1)(2\eta + 1)$ points d'intersection absorbés en A. Il en résulte que c'est la première hypothèse qui est valable, c'est-à-dire que les courbes $C_0^{(\eta-1)}$ ont un point double en A_{21} et ne passent pas par A_{22}. De plus, les courbes $C_0^{(\eta-1)}$ passent encore par un certain nombre de points $A'_1, A'_2, \ldots$, absorbant $2\eta - 5$ des intersections de ces courbes avec les courbes $C_0^{(\eta-1)}$. Supposons que les x premiers de ces points soient doubles pour les courbes $C_0^{(\eta-1)}$. On a $x \leqslant \eta - 3$ et il y a au moins un point simple commun aux courbes $C_0^{(\eta-1)}$, $C_0^{(\eta)}$.

Le genre d'une courbe $\Gamma_0^{(\eta-1)}$ étant $\pi - \eta$, celui d'une courbe $C_0^{(\eta-1)}$ étant

$$p(\pi - 1) + 1 - \frac{1}{2}(2\eta - 1)(2\eta - 2) - (x + 2)$$

et l'involution déterminée par I_p sur une courbe $C_0^{(\eta-1)}$ ayant trois points unis, on a, par la formule de Zeuthen, $x = \eta - 3$. Les courbes $C_0^{(\eta-1)}$ passent donc doublement par les points $A'_1, A'_2, \ldots, A'_{\eta-3}$ et simplement par le point $A'_{\eta-2}$.

Les courbes $C_0^{(\eta-1)}$ ont encore en commun un certain nombre de points $A''_1, A''_2, \ldots$ infiniment voisins successifs de $A'_{\eta-2}$, simples par ces courbes. Soit y le nombre de ces points. En comptant le nombre des points d'intersection de deux courbes $C_0^{(\eta-1)}$ absorbés en A, on trouve $y = 1$. Les courbes $C_0^{(\eta-1)}$ ont donc encore en commun un point simple, A''_1, uni parfait, infiniment voisin de $A'_{\eta-2}$.

Au domaine du point A_{11} correspond, sur la surface $\Phi^{(\eta-1)}$, une conique $\gamma^{(\eta-2)}$, projection de γ, et au domaine du point A''_1, une droite $s_{\eta-1}$, rencontrant $\gamma^{(\eta-2)}$ en un point, simple pour la surface.

19. Considérons les courbes $C_0^{(i+1)}$, qui ont la multiplicité $\eta + i + 1$ en A, $\eta - i$ tangentes confondues avec AA_1 et $2i + 1$ avec AA_2. A ces courbes correspondent, sur la surface $\Phi^{(i)}$, les sections $\Gamma_0^{(i+1)}$ de cette surface par les hyperplans passant par un point simple $A_0^{(i)}$. A la courbe γ correspond, sur la surface $\Phi^{(i)}$, une courbe $\gamma^{(i-1)}$, d'ordre $\eta - i + 1$, passant par $A_0^{(i)}$ et rencontrée, en dehors de ce point, en $\eta - i$ points par les courbes $\Gamma_0^{(i+1)}$; ces points correspondent à des points des courbes $C_0^{(i+1)}$ infiniment voisins de A_{11} ; ce point est multiple d'ordre $\eta - i$ pour ces dernières courbes.

Sur une courbe $C_0^{(i+1)}$, le point A ne peut être l'origine que d'une seule branche, tangente à AA_2, se terminant par un point uni parfait, simple pour la courbe, au domaine duquel correspond sur $\Phi^{(i)}$ le domaine du point $A_0^{(i)}$.

Une courbe C_1 doit rencontrer une courbe $C_0^{(i+1)}$ en p points confondus en A. Si ρ est la multiplicité du point A_{21} par les courbes $C_0^{(i+1)}$, on a donc $\rho \leqslant \eta - i$.

Pour que l'on puisse avoir $\rho = \eta - i$, c'est-à-dire pour que les courbes $C_0^{(i+1)}$ ne passent pas par A_{22}, il faut que $\eta - i \leqslant 2\,i + 1$, c'est-à-dire $\eta \leqslant 3\,i + 1$. Observons que l'on ne peut d'ailleurs avoir $\eta = 3\,i + 1$, car cela entraînerait $p = 6\,i + 3$ et ce nombre ne serait pas premier.

Nous supposerons en premier lieu i tel que $3\,i + 1 \leqslant \eta$. Alors, les courbes $C_0^{(i+1)}$ doivent passer par A_{22} et puisque, sur une de ces courbes, A est l'origine d'une seule branche tangente à AA_2, elles ne peuvent passer par A_1'. Cela étant, comme le nombre des points d'intersection d'une courbe $C_0^{(i+1)}$ avec une quelconque des courbes $C_0^{(i+1)}$, $C_0^{(i+2)}, \ldots$, $C_0^{(\eta)}$ absorbés en A est égal à $(\eta + i + 1)\,(2\,\eta + 1)$, en considérant les intersections avec une courbe $C_0^{(\eta)}$, on a $\rho = 2\,i + 1$.

Désignons par ρ_{i1}, $\rho_{i2}, \ldots$ les multiplicités des points infiniment voisins successifs de A_{21} pour les courbes $C_0^{(i+1)}$, le premier de ces points étant A_{22} et le dernier, uni parfait, qui ne peut appartenir aux courbes C_1, étant simple.

En exprimant que les courbes $C_0^{(i+1)}$ ont $(2\,\eta + 1)$ $(\eta + i + 1)$ points d'intersection absorbés en A, on a

$$\sum_j \rho_{ij}^2 = (2i + 1)\,(\eta - 3i - 1). \tag{1}$$

En utilisant la formule de Zeuthen pour la correspondance entre une courbe $C_0^{(\eta+1)}$ et une courbe $\Gamma_0^{(\eta+1)}$ et en tenant compte de la relation (1), on a

$$\sum_j \rho_{ij} = \eta - i - 1. \tag{2}$$

On a d'ailleurs

$$\ldots \leqslant \rho_{i2} \leqslant \rho_{i1} \leqslant 2\,i + 1.$$

20. Nous allons nous occuper des courbes C_0'', données par $i = 1$.

Supposons que dans les points infiniment voisins successifs de A_{21} appartenant aux courbes C_0'', les x_3 premiers soient triples, les x_2 suivants doubles et les x_1 derniers simples. Les relations (1) et (2) donnent

$$9x_3 + 4x_2 + x_1 = 3(\eta - 4), \quad 3x_3 + 2x_2 + x_1 = \eta - 2.$$

On en déduit $x_1 + x_2 = 3$. On a d'ailleurs, comme on l'a observé plus haut, $x_1 > 0$.

Le nombre $p = 2\eta + 1$ étant premier par hypothèse, η peut être de la forme $\eta = 3\zeta$ ou $\eta = 3\zeta + 2$. Un calcul simple montre que deux cas peuvent se présenter :

a) $\eta = 3\zeta$, $x_1 = 2$, $x_2 = 1$, $x_3 = \zeta - 2$.

b) $\eta = 3\zeta + 2$, $x_1 = 3$, $x_2 = 0$, $x_3 = \zeta - 1$.

Tenons compte du fait que les courbes C_1 doivent rencontrer C_0'' en p points confondus en A. Dans le premier cas, $\eta = 3\zeta$, les courbes C_0'' ont des points triples en A_{21}, $A_{22} \ldots$, $A_{2\zeta-1}$, un point double en $A_{2\zeta}$ et elles ont en outre deux points simples B_1, B_2 infiniment voisins successifs de $A_{2\zeta}$.

Dans le second cas, $\eta = 3\zeta + 2$, les courbes C_0'' ont des points triples en A_{21}, $A_{22}, \ldots$, $A_{2\zeta}$, un point simple en $A_{2\zeta+1}$ et deux points simples B_1, B_2 infiniment voisins successifs de $A_{2\zeta+1}$.

21. Nous allons maintenant étudier les courbes $C_0^{(i+1)}$ dans le cas où i a la plus grande valeur possible. Nous devons avoir $3i + 1 < \eta$. Si $\eta = 3\zeta$, nous aurons $i = \zeta - 1$ et si $\eta = 3\zeta + 2$, $i = \zeta$.

Envisageons le premier cas, $\eta = 3\zeta$. Les formules (1) et (2) donnent

$$\Sigma\, \rho_{\zeta-1j}^2 = 2(2\zeta - 1), \qquad \Sigma\, \rho_{\zeta-1j} = 2\zeta.$$

Les courbes C_1 doivent rencontrer les courbes $C_0^{(\zeta}$ en $p = 6\zeta + 1$ points confondus en A. Le point A absorbe 4ζ intersections, le point A_{21}, $2\zeta - 1$ intersections ; le point A_{22} absorbe donc au plus deux intersections et on a $\rho_{\zeta-1j} \leqslant 2$. Cela étant, soient x_2 le nombre des points doubles et x_1 le nombre des points simples. On a

$$4x_2 + x_1 = 2(2\xi - 1), \qquad 2x_2 + x_1 = 2\zeta,$$

d'où $x_2 = \zeta - 1$, $x_1 = 2$. Il en résulte que les courbes $C_0^{(\zeta)}$ passent $2\zeta - 1$ fois par A_{21}, deux fois par A_{22}, deux fois par des points $B'_1, B'_2, \ldots, B'_{\zeta-2}$ infiniment voisins successifs de A_{22} et une fois par deux points $B'_{\zeta-1}$, B'_ζ infiniment voisins successifs de $B'_{\zeta-2}$.

On vérifie aisément qu'une courbe C''_0 et une courbe $C_0^{(\zeta)}$ ont bien $(\eta + 2)(2\eta + 1)$ points d'intersection confondus en A. De plus, pour $\zeta = 2$, $p = 13$, les courbes C''_0 et $C_0^{(\zeta)}$ se confondent.

Passons à l'examen du second cas, $\eta = 3\zeta + 2$. Les relations (1), (2) deviennent

$$\Sigma\, \rho_{\zeta j}^2 = 2\zeta + 1, \qquad \Sigma\, \rho_{\zeta i} = 2\zeta + 1.$$

On en déduit

$$\Sigma\, \rho_{\zeta j}(\rho_{\zeta j} - 1) = 0.$$

d'où $\rho_{\zeta j} = 1$. Les courbes $C_0^{(\zeta+1)}$ passent $2\zeta + 1$ fois par A_{21}, une fois par le point A_{22} et une fois par 2ζ points $B'_1, B'_2, \ldots, B'_{2\zeta}$ infiniment voisins successifs de A_{22}, le dernier étant uni parfait.

On obtient les mêmes vérifications que dans le premier cas et, pour $\zeta = 1$, $p = 11$, les courbes C''_0, $C_0^{(\zeta+1)}$ coïncident.

22. On pourra déterminer le comportement des courbes $C_0^{(i+1)}$ au point A de la même manière, lorsque i est tel que $3i + 1 < \eta$. Observons que pour la valeur maximum de i, les courbes ne passent que par les points A_{21}, A_{22} ; cela permet de déterminer dans chaque cas la multiplicité ρ de A_{22} pour les courbes en question.

Supposons en premier lieu $\eta = 3\zeta$. Les courbes $C_0^{(\zeta)}$ passent 4ζ fois par A, $2\zeta + 1$ fois par A_{11}, $2\zeta - 1$ fois par A_{21} et 2 fois par A_{22}. Les courbes $C_0^{(i+1)}$ passent $3\zeta + 1 + 1$ fois par A, $3\zeta - 1$ fois par A_{11}, $2\zeta + 1$ fois par A_{22} et ρ fois par A_{22}. Ces courbes doivent avoir

$(3\zeta + i + 1)(6\zeta + 1)$ points d'intersection réunis en A. On en conclut $\rho = 2i + 1$.

Supposons maintenant $\eta = 3\xi + 2$. Les courbes $C_0^{(\zeta+1)}$ ont les multiplicités $4\zeta + 3$ en A, $2\zeta + 2$ en A_{11}, $2\zeta + 1$ en A_{21}, un en A_{22}. On en conclut également $\rho = 2i + 1$.

23. Il nous reste à examiner les courbes $C_0^{(i+1)}$ lorsque l'on a $3i + 1 > \eta$. Ces courbes ont en A la multiplicité $\eta + i + 1$; elles passent $\eta - i$ fois par le point uni parfait A_{11} et ne peuvent passer par A_{22} ; comme elles doivent rencontrer les courbes C_1 en p points confondus en A, elles doivent avoir la multiplicité $\eta - i$ en A_{21}. Elles passent en outre par un certain nombre de points A_1', A_2',... infiniment voisins successifs de A_{22}, situés sur $C_0^{(\eta)}$.

Désignons par x_η le nombre des points d'intersection d'une courbe $C_0^{(i+1)}$ et d'une courbe $C_0^{(\eta)}$ absorbés en A en dehors des points A, A_{11}, A_{21} ; par $x_{\eta-1}$ le nombre analogue obtenu en remplaçant $C_0^{(\eta)}$ par $C_0^{(\eta-1)}$. On trouve facilement

$$x_\eta = 3i + 1 - \eta, \qquad x_{\eta-1} = 2(3i + 1 - \eta).$$

Enfin, le nombre de points d'intersection de deux courbes $C_0^{(i+1)}$ absorbés en A, en dehors des points A, A_{11}, A_{21}, est

$$x_{i+1} = (\eta - i)(3i + 1 - \eta).$$

Observons qu'entre une courbe $\Gamma_0^{(i+1)}$ et la courbe homologue $C_0^{(i+1)}$, nous avons une correspondance $(1, p)$ présentant $\eta - i + 1$ points de diramation. Soit x le nombre dont diminue le genre de $C_0^{(i+1)}$ par les multiplicités des points de cette courbe, infiniment voisins successifs de A_{21}. La formule de Zeuthen donne

$$2x = (3i - \eta)(\eta - i - 1).$$

Nous allons déterminer le comportement en A des courbes $C_0^{(i+1)}$ pour la plus petite valeur de i pour laquelle on a $3i + 1 > \eta$.

Supposons en premier lieu $\eta = 3\zeta$. Nous devons prendre $i = \zeta$. Nous avons alors

$$x_\eta = 1, \quad x_{\eta-1} = 2, \quad x_{\zeta+1} = 2\zeta, \quad x = 0.$$

Les courbes $C_0^{(\zeta+1)}$ ont donc en A_{21} la multiplicité 2ζ ; elles passent simplement par le point A_1 et par une suite de $2\zeta - 1$ points infiniment voisins successifs de A_1', dont le dernier est uni parfait pour I_p.

Envisageons maintenant l'hypothèse $\eta = 3\zeta + 2$, $i = \zeta + 1$. Nous avons

$$x_\eta = 2, \quad x_{\eta-1} = 4, \quad x_{\zeta+2} = 2(2\zeta + 1), \quad x = \zeta.$$

Les courbes $C_0^{(\zeta+2)}$ ont en A_{21} la multiplicité $2\zeta + 1$ en A_{21}, la multiplicité deux en A_1' ; elles ont en outre en commun une suite de $\zeta - 1$ points doubles suivis de deux points simples, infiniment voisins successifs de A_1'. Le dernier de ces points est uni parfait pour I_p.

Les comportements en A des courbes étudiées, pour les autres valeurs de i, se détermineront de la même manière.

24. Pour terminer, nous examinerons le comportement en A des courbes $C_3, C_4, \ldots, C_{p-1}$.

Les courbes C_{2i} ($i = 1, 2, \ldots, \eta$) ont en A la multiplicité i, les i tangentes étant confondues avec AA_1. Ces courbes passent en outre i fois par le point uni parfait A_{11}.

Les courbes C_{2i+1} ($i = 0, 1, \ldots, \eta - 1$) ont en A la multiplicité $i + 1$, i tangentes étant confondues avec AA_1 et la dernière avec AA_2. Ces courbes ont la multiplicité i en A_{11}. En examinant les intersections de ces courbes avec les courbes $C_0', C_0'', \ldots$ absorbés en A, on voit facilement qu'elles passent simplement par les points $A_{21}, A_{22}, \ldots, A_{2\eta}$.

Sur la surface Φ', les courbes Γ_{2i} rencontrent la courbe γ en i points ; les courbes Γ_{2i+1} rencontrent la courbe γ en i points également et la droite s_1 en un point.

Liège, le 11 mars 1948.