

Sur quelques surfaces algébriques irrégulières

par LUCIEN GODEAUX
Membre de l'Académie.

Dans cette note, utilisant le même procédé que dans des notes parues précédemment dans ce *Bulletin*, nous construisons quelques surfaces irrégulières.

Nous partons d'une courbe plane L transformée en elle-même par une homographie de période trois et nous considérons l'involution d'ordre trois appartenant à la surface F qui représente les couples de points non ordonnés de la courbe L . Cette involution possède, dans le cas actuel, trois points unis non parfaits. La surface F' image de cette involution est irrégulière. D'une manière précise, nous établissons l'existence d'une surface algébrique de genres

$$p_a = \frac{3}{8} \nu(\nu + 1)(3\nu + 1)(3\nu - 2),$$

$$p_o = \frac{1}{8} \nu(3\nu - 1)(3\nu + 1)(3\nu + 2).$$

$$p^{(1)} = \frac{1}{2} (3\nu - 1)(3\nu + 2)(6\nu^2 + 2\nu - 3) + 1,$$

ν étant un entier positif quelconque.

Cette surface possède l'irrégularité

$$p_o - p_a = \frac{1}{2} \nu(3\nu + 1).$$

Les propriétés de la surface qui représente les couples de points de la courbe L utilisées sont dues à M. Severi ⁽¹⁾.

(1) Atti della R. Acad. di Torino, 1902-1903.

D'autre part, on trouvera les propriétés des involutions cycliques dont nous nous servons dans notre exposé sur *Les involutions cycliques appartenant à une surface algébrique* ⁽¹⁾.

1. Désignons par ϕ_1, ϕ_2 deux polynômes entiers, rationnels et homogènes à quatre variables de degré ν . L'équation

$$x_1^2 \phi_1(x_1^3, x_2^3, x_3^3, x_1 x_2 x_3) + x_2 x_3 \phi_2(x_1^3, x_2^3, x_3^3, x_1 x_2 x_3) = 0$$

représente une courbe L, d'ordre $3\nu + 2$, dépourvue de points multiples, transformée en elle-même par l'homographie cyclique de période trois,

$$x'_1 : x'_2 : x'_3 = x_1 : \epsilon x_2 : \epsilon^2 x_3, \quad (1)$$

où ϵ est une racine cubique primitive de l'unité. La courbe L est de genre

$$\pi = \frac{3}{2} \nu(3\nu + 1)$$

et l'homographie (1) engendre sur cette courbe une involution d'ordre trois, présentant deux points unis en $O_2(0, 1, 0), O_3(0, 0, 1)$. Cette involution est par conséquent de genre

$$\frac{1}{2} \nu(3\nu + 1) = \frac{1}{3} \pi.$$

La courbe L touche en O_2, O_3 respectivement les droites $x_3 = 0, x_2 = 0$.

Soit F la surface qui représente les couples de points non ordonnés de la courbe L. Un point P de F est l'image d'un couple de points $P_1 P_2$ de L. Soient P'_1, P'_2 les points de L que l'homographie (1) fait correspondre à P_1, P_2 et P' le point de F qui représente le couple $P'_1 P'_2$. Le point P' correspond au point P dans une transformation birationnelle T de F en soi. La transformation T

⁽¹⁾ Paris, Hermann, 1935.

a la période trois et engendre sur F une involution I_3 , d'ordre trois.

L'involution I_3 possède trois points unis : le point A_1 , qui représente le couple O_2O_3 de L ; le point A_3 , qui représente le couple formé du point O_2 compté deux fois ; le point A_3 , qui représente le couple formé du point O_3 compté deux fois.

2. Soit K_0 la courbe lieu des points de F représentant les couples de points de L formés des points de cette courbe comptés deux fois. Cette courbe est de genre π .

Les couples de points de L contenant un point fixe R ont pour homologues sur F les points d'une courbe K , de genre π qui, lorsque R décrit L , engendre un système continu $\{K\}$, de degré un et d'indice deux, ayant K_0 pour enveloppe. Nous désignerons par K_2, K_3 les courbes K obtenues en faisant coïncider R avec O_2 ou avec O_3 . La courbe K_2 touche K_0 en A_2 , la courbe K_3 touche K_0 en A_3 et les courbes K_2, K_3 se coupent en A_1 .

Aux couples de points de L alignés sur un point R de L mais ne contenant pas ce point, correspondent sur F les points d'une courbe H . Pour déterminer le genre de H , observons qu'une droite passant par R coupe encore L en $3\nu + 1$ points qui se distribuent en $\frac{3\nu(3\nu + 1)}{2} = \pi$

couples auxquels correspondent π points de H . Lorsque la droite varie, ces points engendrent sur H une série linéaire g_π^1 . Si en particulier, nous considérons une droite passant par R et touchant L en un autre point, le groupe de π points correspondant sur H possède $3\nu - 1$ points doubles. Si x est le genre de H , on a donc

$$2(\pi + x - 1) = (3\nu - 1)[(3\nu + 1)(3\nu + 2) - 2],$$

d'où

$$x = 3\nu\pi - 6\nu + 1.$$

Lorsque le point R décrit L , la courbe H engendre un

système continu $\infty^1, \{H\}$, de degré $\frac{3}{2}\nu(3\nu - 1)$ et d'indice $\frac{3}{2}\nu(3\nu - 1)$. Une courbe H rencontre une courbe K en 3ν points.

Considérons maintenant un point R du plan de la courbe L , n'appartenant pas à cette courbe. Les droites passant par R découpent sur L une série linéaire d'ordre $3\nu + 2$. Aux couples de points appartenant à un groupe de cette série, correspondent sur F $\frac{1}{2}(3\nu + 2)(3\nu + 1)$ points engendrant une courbe C . Sur cette courbe, les ∞^1 groupes de points ainsi obtenus forment une série linéaire. Si un groupe correspond à une droite passant par R et tangente à L , il contient 3ν points doubles et par conséquent si y est le genre de la courbe C , on a

$$(3\nu + 1)(3\nu + 2) + 2y - 2 = 3\nu(3\nu + 1)(3\nu + 2),$$

d'où

$$y = (3\nu + 1)\pi - 3\nu.$$

Sur F , les courbes C engendrant un réseau $|C|$, de degré $\frac{1}{2}(3\nu + 1)(3\nu + 2)$. Une courbe C rencontre une courbe K en $3\nu + 1$ points et une courbe H en $\frac{3}{2}\nu(3\nu + 1) = \pi$ points. On a d'ailleurs

$$C \equiv K + H.$$

3. La courbe K_2 , c'est-à-dire la courbe K relative au point O_2 , est transformée en elle-même par T . Appelons H_2 la courbe H relative au point O_2 ; elle est également transformée en elle-même par T ; cette courbe ne passe ni par A_1 , ni par A_2 ; elle rencontre les courbes K_2, K_3 en des groupes de 3ν points transformés en eux-mêmes par T .

De même la courbe K_3 est transformée en elle-même

par T . La courbe H_3 , courbe H relative au point O_3 , est également transformée en elle-même par T et ne passe par aucun des points A_1, A_3 .

Les couples de points de L alignés sur le point O_1 ont pour homologues sur F les points d'une courbe C , que nous désignerons par C_1 , transformée en elle-même par T . La courbe C_1 passe par le point A_2 sans y toucher K_2 et par le point A_3 , sans y toucher K_3 . Elle rencontre encore K_2 aux points du groupe (K_2, H_2) et K_3 aux points du groupe (K_3, H_3) . La courbe C_1 rencontre en outre chacune des courbes H_2, H_3 en $\frac{3}{2}\nu(3\nu - 1)$ points.

Considérons un point R de la droite O_2O_3 et la courbe C correspondante. Lorsque le point R décrit la droite O_2O_3 , cette courbe C engendre un faisceau déterminé par les courbes $K_2 + H_2, K_3 + H_3$ et qui a comme points-base : les 3ν points communs aux courbes K_2, H_3 ; les 3ν points communs aux courbes K_3, H_2 ; les $\frac{3}{2}\nu(3\nu - 1)$ points communs aux courbes H_2, H_3 ; le point A_1 commun aux courbes K_2, K_3 . La base se compose de $\frac{1}{2}(3\nu + 1)$

$(3\nu + 2)$ points distincts, ce nombre est égal au degré du réseau $|C|$, donc les courbes du faisceau envisagé ont des tangentes variables aux points-base de ce faisceau, en particulier en A_1 . La transformation T transforme les unes dans les autres les courbes du faisceau et en laisse deux : $K_2 + H_2, K_3 + H_3$, invariantes. Il en résulte que dans le domaine du point A_1 , T détermine une involution non identique et que A_1 est donc un point uni non parfait de l'involution I_3 .

Envisageons maintenant dans le réseau $|C|$, le faisceau déterminé par les courbes $K_2 + H_2$ et C_1 ; ce faisceau est transformé en soi par T sans que ses courbes soient transformées chacune en soi par T . Le faisceau a pour points-base : Les 3ν points communs à K_2 et H_2 ;

les $\frac{3}{2}\nu(3\nu - 1)$ points communs à C_1 et H_2 ; enfin le point A_2 . Observons que les points (K_2, H_2) sont doubles pour la courbe $K_2 + H_2$ et simples pour C_1 , donc les courbes du faisceau considéré se touchent en ces points. Cela étant, les courbes du faisceau ont en A_2 des tangentes variables et on en conclut, comme plus haut, que A_2 est un point uni non parfait de l'involution I_3 .

En considérant le faisceau de courbes C déterminé par les courbes $K_3 + H_3, C_1$, on démontre de même que A_3 est un point uni non parfait de l'involution I_3 .

4. La surface F a les genres (Severi)

$$p_g = \frac{1}{2}\pi(\pi - 1), \quad p_a = \frac{1}{2}\pi(\pi - 1) - \pi,$$

$$p^{(1)} = (\pi - 2)(4\pi - 5).$$

Soit F' une surface image de l'involution I_3 . Comme celle-ci possède trois points unis non parfaits, le genre arithmétique p'_a de F' est donné par la relation

$$12(p_a + 1) = 3 \cdot 12(p'_a + 1) - 3 \cdot 8.$$

On a donc

$$p'_a \equiv \frac{1}{3}p_a = \frac{1}{6}\pi(\pi - 1) - \frac{1}{3}\pi$$

ou, en remplaçant π par sa valeur

$$p'_a = \frac{3}{8}\nu(\nu + 1)(3\nu + 1)(3\nu - 2).$$

Le genre linéaire $p'^{(1)}$ de F' est donné par

$$3(p'^{(1)} - 1) = p^{(1)} - 1,$$

donc

$$p'^{(1)} = \frac{1}{2}(3\nu - 1)(3\nu + 2)(6\nu^2 + 2\nu - 3) + 1.$$

La série canonique de la courbe L est découpée par les courbes d'ordre $3\nu - 1$. L'homographie (1) transforme en lui-même le système formé par ces courbes et celui-ci

contient trois systèmes linéaires partiels appartenant à l'involution d'ordre trois engendrée par cette homographie. Ces systèmes sont formés de courbes touchant deux des côtés du triangle de référence aux sommets du troisième côté. Ces trois systèmes ont donc même dimension

$$\frac{1}{2}(\nu + 1)(3\nu - 2)$$

Si nous considérons le modèle canonique de la courbe L , dans l'espace $S_{\pi-1}$, il correspond à l'homographie (1) une homographie de $S_{\pi-1}$ ayant trois axes ponctuels de dimension $\frac{1}{2}(\nu + 1)(3\nu - 2)$. On sait (Severi) que les courbes canoniques de F correspondent aux variétés de cordes de la courbe canonique L , de $S_{\pi-1}$, appartenant à des complexes linéaires. Le système canonique de F comprendra trois systèmes linéaires appartenant à l'involution I_3 ; l'un de ces systèmes sera le transformé du système canonique de F' . Ces trois systèmes correspondent aux systèmes de complexes linéaires de droites de $S_{\pi-1}$ transformés en eux-mêmes par l'homographie déterminée dans cet espace. Or, ces trois systèmes ont la même dimension

$$\frac{1}{8}\nu(3\nu - 1)(3\nu + 1)(3\nu + 2) - 1.$$

Il en résulte que le genre géométrique p'_g de F' est

$$p'_g = \frac{1}{8}\nu(3\nu - 1)(3\nu + 1)(3\nu + 2).$$

L'irrégularité de la surface F' est

$$p'_g - p'_a = \frac{1}{2}\nu(3\nu + 1).$$

5. Soit $|G|$ le système canonique de la surface F . Appelons $|G_0|$, $|G_1|$, $|G_2|$ les systèmes partiels contenus dans $|G|$ et appartenant à l'involution I_3 ; soient $|G'|$, $|G'_1|$, $|G'_2|$ les systèmes linéaires complets cor-

respondant sur la surface F' . L'un de ces systèmes, soit $|G'|$, est le système canonique de F' .

D'après la théorie des involutions, le système $|G_0|$ est dépourvu de points-base, ce qui est d'ailleurs confirmé par l'application de la formule de Zeuthen à la correspondance entre une courbe canonique de F' et la courbe canonique homologue de F . Les autres systèmes $|G_1|$, $|G_2|$ ont comme points-base les trois points unis de l'involution I_3 et leurs courbes ont, en ces points, des tangentes fixes unies pour I_3 .

Si l'on rapporte projectivement les courbes G' aux hyperplans d'un espace linéaire à

$$\frac{1}{8} \nu(3\nu - 1)(3\nu + 1)(3\nu + 2) - 1$$

dimensions, il correspond à la surface F' le modèle projectivement canonique de cette surface. Les points de diramation sont des points doubles biplanaires ordinaires.

Liège, le 30 juillet 1946.