Sur quelques variétés algébriques à trois dimensions

Nota del Académico Correspondiente Sr. Lucien Godeaux, presentada en la sesión de la Sección de Ciencias Exactas del 27 de octubre.

Nous nous proposons, dans cette courte note, de construire, en vue de recherches ultérieures, le système canonique de quelques variétés algébriques à trois dimensions.

1. L'équation d'une surface d'ordre n de l'espace ordinaire S_3 contient $r = \binom{n+3}{3}$ coefficients et ces surfaces forment un système linéaire de dimension $r-1$. En rapportant projectivement ces surfaces aux hyperplans d'un espace linéaire S_{r-1} à $r-1$ dimensions, aux points de l'espace S_3 correspondent les points d'une variété de Veronese V_3 d'ordre n^3. Aux plans de S_3 correspondent sur V_3 des surfaces d'ordre n^2 formant un système linéaire et aux surfaces d'ordre $\nu < n$ correspondent des surfaces d'ordre $n^2 \nu$.

Supposons que l'espace S_{r-1} appartienne à un espace linéaire S_r à r dimensions et soit 0 un point de S_r n'appartenant pas à S_{r-1}. Considérons le cône V_4 projetant de 0 la variété V_3 et le cône V_3' projetant du même point une surface d'ordre $n^2\,\nu$ correspondant à une surface déterminée d'ordre ν de S_3. Soit enfin V_{r-1} une hypersurface d'ordre m passant simplement par 0 et contenant le cône V_3'. Cette hypersurface coupe le cône V_4, en dehors de V_3', suivant une variété Ω_3 d'ordre $n^2\,(m\,.\,n-\nu)$.

La section de V_4 par V_{r-1} a un point multiple d'ordre n^3 en 0; le cône V_3' a un point multiple d'ordre $n^2\,\nu$ en 0. Par conséquent, le point 0 est multiple d'ordre $n^2\,(n-\nu)$ pour la variété Ω_3.

Le cône qui projette de 0 la surface d'ordre n^2 de V_3 qui correspond à un plan de S_3, coupe l' hypersurface V_{r-1} suivant une surface d'ordre $n.m$ formée d'une surface d'ordre $n\,\nu$ appartenant au cône V_3' et d'une surface F, d'ordre $n\,(m\,.\,n-\nu)$, appartenant à Ω_3. Les surfaces F forment un système linéaire triplement infini, $|\,F\,|$, de degré $m-1$.

A une droite de S_3 correspond sur V_3 une courbe d'ordre n. Le cône projetant cette courbe du point 0 rencontre V_{r-1} suivant une courbe d'ordre $n.m$ formée de ν droites appartenant à V_3' et d'une courbe C, d'ordre $n.m-\nu$, appartenant à Ω_3.

Deux surfaces F ont en commun une courbe C, intersection complète de ces surfaces.

Dans une communication faite au Congrès de l'Association Française pour l'Avancement des Sciences, tenu à Liége en juillet 1939, nous avons étudié les surfaces F. Rappelons les résultats qui nous sont nécessaires.

Une surface F possède en 0 la multiplicité $n(n-\nu)$. Le domaine du point 0 sur la surface F est équivalent, au point de vue des transformations birationnelles, à une courbe D. Sur une surface F, les courbes C forment un réseau de degré $m-1$ et de genre

$$\tfrac{1}{2}\, n\,(m+1)\,(m-2) - (\nu+1)\,(m-2)\,.$$

Le système canonique d'une surface F est

$$|\,(m.n - n - \nu - 3)\,C + (m-3)\,D\,|\,.$$

2. Ceci rappelé, nous allons déterminer le système canonique de la variété Ω_3.

Considérons la section de Ω_3 par un hyperplan ξ ne passant pas par 0. On peut supposer sans restriction que cet hyperplan ξ coïncide avec l'hyperplan S_{r-1} contenant la variété de Veronese V_3. A la section de Ω_3 par ξ correspond, dans l'espace S_3, une surface d'ordre $m.n-\nu$. Le système canonique de cette surface est découpé par les surfaces d'ordre $m.n-\nu-4$. A ces dernières surfaces correspondent, sur Ω_3, des surfaces équivalentes à $m.n-\nu-4$ surfaces F, augmentées d'un certain nombre de fois la surface infiniment petite $\triangle$, à laquelle est équivalent le point multiple 0 de Ω_3. Le système des sections hyperplanes de la variété Ω_3 a donc comme adjoint le système

$$|(m.n-\nu-4)\,F+\lambda\,\triangle|,$$

où λ est un entier.

Observons d'autre par qu'un hyperplan passant par 0 coupe la variété Ω_3 suivant une surface équivalente à n surfaces F, augmentée de la surface $\triangle$. On a donc

$$|(n\,F+\triangle)'|=|(m.n-\nu-4)\,F+\lambda\,\triangle|.$$

Par conséquent, en vertu du théorème d'adjonction, on a

$$|F'|=|(m.n-n-\nu-3)\,F+(\lambda-1)\,\triangle|$$

Le système $|F'|$ découpe, sur une surface F, le système canonique de celle-ci. D'autre part, deux surfaces F se coupent suivant une courbe C et une surface F coupe la surface $\triangle$ suivant une courbe D. On a donc, sur une surface F,

$$|(m.n-n-\nu-3)\,C+(m-3)\,D| = |(m.n-n-\nu-3)\,C+$$
$$+(\lambda-1)\,D|,$$

d'où $\lambda=m-2$.

Le système canonique de la variété Ω_3 est donc

$$|(m.n-n-\nu-4)\,F+(m-3)\,\triangle|.$$

3. Le cas où ν est nul, l'hypersurface V_{r-1} ne passant pas par le point 0, doit être traité séparément.

Dans ce cas, le système canonique de la surface F est

$$|(m.n-n-3)\,C|.$$

Le système adjoint au système des sections hyperplanes $|nF|$ de la variété Ω_3, est

$$|(m.n-4)\,F|.$$

On a donc

$$|(nF)'| = |(m.n-4)\,F|,$$

d'où

$$| F' | = | (m . n - n - 3) F | .$$

Le système canonique de la variété Ω_3 est donc

$$| (m . n - n - 4) F | .$$

On observera que le cas $\nu = 0$, l' hypersurface V_{r-1} passant par le point 0, est évidemment un cas limite du précédent.