Extrait du *Bulletin de la Société royale des Sciences de Liège*
Séance du 28 juin 1945. — N° 6-7.

Quelques remarques sur les surfaces de genres un et de rang deux,

par Lucien GODEAUX, Membre de la Société.

(*Première note.*)

Dans les travaux antérieurs [1], nous avons établi les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'une surface de genres un représente une involution du second ordre appartenant à

---

(1) Mémoire sur les involutions appartenant à une surface de genres un (*Annales de l'Ecole Normale Supérieure*, 1914, pp. 357-430; 1919, pp. 51-70); Mémoire sur les surfaces algébriques doubles ayant un nombre fini de points de diramation (*Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse*, 1914, pp. 289-312); Les involutions cycliques appartenant à une surface algébrique (*Actualités scient. et indust.*, Paris, Hermann, 1935).

une surface également de genres un. Précisément, nous avons établi le théorème suivant :

Les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'une surface F *de genres un* ($p_a = P_4 = 1$), *d'ordre* $2\pi - 2$, *normale dans un espace* S_π *à* π *dimensions, soit l'image d'une involution du second ordre appartenant à une surface de genres un* ($p_a = P_4 = 1$) *sont que :*

1. *La surface* F *possède huit points doubles coniques.*

2. *Parmi les hyperquadriques passant par ces huit points doubles, il y en ait qui touchent la surface* F *en tout point d'intersection.*

Le contact d'une de ces hyperquadriques a lieu le long d'une courbe d'ordre $2\pi - 2$ et de genre $\pi - 2$; ces courbes de contact forment un système linéaire de dimension $\pi - 2$.

Nous dirons, pour abréger, qu'une surface F satisfaisant à ces conditions est de rang deux.

Dans le cas le plus simple : $\pi = 3$, la surface F, du quatrième ordre, est l'enveloppe d'un système simplement infini, d'indice deux, de quadriques passant par les huit points doubles. Les courbes de contact sont les biquadratiques, caractéristiques de ce système.

On peut remarquer que si une surface du quatrième ordre contient une biquadratique, celle-ci appartient à un faisceau et il existe un second faisceau de biquadratiques sur la surface. Lorsque F est de rang deux, ces deux faisceaux se confondent en un seul.

De même, dans le cas où π est quelconque, si une surface de genres un, d'ordre $2\pi - 2$, de S_π (à sections hyperplanes de genre π), contient une courbe d'ordre $2\pi - 2$ et de genre $\pi - 2$, donc un système linéaire de dimension $\pi - 2$ de pareilles courbes, elle contient un second système linéaire de courbes de même nature. Si la surface est de rang deux, ces deux systèmes coïncident.

Dans cette note, et dans celles qui lui feront suite, nous nous proposons de déterminer les surfaces F pour les premières valeurs de π. Nous consacrerons cette première note au cas $\pi = 4$.

Nous commençons par considérer les surfaces de genres un, d'ordre six, de S_4, contenant un réseau de sextiques de genre deux, et par suite un second. Une telle surface possède un groupe de transformations birationnelles en elle-même sur lequel nous donnons quelques indications. Nous passons ensuite au cas où la surface possède en outre un point double conique.

Nous considérons enfin le cas où la surface F est de rang deux et nous établissons le théorème suivant :

Si une surface de genres un ($p_a = P_4 = 1$), *normale, d'ordre six, de* S_4, *représente une involution du second ordre appartenant à une surface de genres un, elle est birationnellement équivalente à un plan double dont la courbe de diramation, du sixième ordre, passe doublement par les sommets d'un quadrilatère complet.*

Cette surface représente l'involution appartenant à un plan double dont la courbe de diramation, du sixième ordre, est anallagmatique.

1. Soit F une surface normale du sixième ordre, de genres un ($p_a = P_4 = 1$) de l'espace S_4. Elle est l'intersection d'une hyperquadrique Q et d'une hypersurface cubique W; ses sections hyperplanes C sont de genre quatre.

Supposons que la surface F contienne une sextique Γ_1 de genre deux. Le nombre-base de F est alors $\rho = 2$ et les courbes C, Γ_1 constituent une base de déterminant

$$\begin{vmatrix} 6 & 6 \\ 6 & 2 \end{vmatrix} = -24.$$

La courbe Γ_1 appartient en effet à un réseau $|\Gamma_1|$ de degré deux.

Les hyperquadratiques de S_4 passant par une courbe Γ_1 sont en nombre ∞^3 et il y en a donc ∞^2 ne contenant pas F. Elles découpent sur F un réseau de courbes

$$|\Gamma_2| = |2C - \Gamma_1|$$

et les courbes Γ_2 sont donc des sextiques de genre deux, coupant les courbes Γ_1 en des groupes de 10 points.

Chacun des réseaux $|\Gamma_1|$, $|\Gamma_2|$ détermine sur F une involution du second ordre et par conséquent une transformation birationnelle involutive de F en soi. Nous désignerons par θ_1, θ_2 les transformations déterminées respectivement par $|\Gamma_1|$, $|\Gamma_2|$.

Considérons la transformation θ_1 et soient C', Γ'_1 les courbes qu'elle fait correspondre à C, Γ_1 respectivement. On a tout d'abord évidemment $\Gamma'_1 \equiv \Gamma_1$.

Les courbes $\lambda\Gamma_1$ sont de genre λ^2+1 et forment par conséquent un système linéaire de dimension λ^2+1; elles découpent sur une courbe C une série linéaire non spéciale d'ordre 6λ dont la dimension est donc $6\lambda - 4$. La plus petite valeur de λ pour laquelle on a $\lambda^2+1 > 6\lambda - 4$ est $\lambda=6$. Le système $|6\Gamma_1|$, transformé en lui-même par θ_1, a la dimension 37 et découpe sur une courbe C une série d'ordre 36 et de dimension 32; il y a donc ∞^4 courbes de $|6\Gamma_1|$ contenant une courbe C comme partie. On en déduit

$$C' \equiv -C + 6\Gamma_1, \Gamma'_1 \equiv \Gamma_1. \qquad (\theta_1)$$

Pour la transformation θ_2, on a de même

$$C' \equiv -C + 6\Gamma_2, \Gamma'_2 \equiv \Gamma_2,$$

c'est-à-dire

$$C' \equiv 11C - 6\Gamma_1, \Gamma'_1 \equiv 20C - 11\Gamma_1, \qquad (\theta_2)$$

C' et Γ'_1 étant cette fois les courbes que θ_2 fait correspondre à C et à Γ_1.

La transformation $T=\theta_1\theta_2$ fait correspondre aux courbes C, Γ_1 respectivement les courbes

$$C' \equiv -11C + 60\Gamma_1, \Gamma'_1 \equiv -20C + 109\Gamma_1. \qquad (T)$$

L'inverse de T donne

$$C' \equiv 109C - 60\Gamma_1, \Gamma'_1 \equiv 20C - 11\Gamma_1. \qquad (T^{-1})$$

La forme quadratique associée à la base (C, Γ_1) est

$$2(3\lambda + 6\lambda\mu + \mu^2).$$

Les substitutions

$$\lambda' = -\lambda, \qquad \mu' = 6\lambda + \mu,$$
$$\lambda' = 11\lambda + 20\mu, \quad \mu' = -6\lambda - 11\mu,$$
$$\lambda' = 11\lambda - 20\mu, \quad \mu' = 60\lambda + 109\mu,$$

qui correspondent respectivement à θ_1, θ_2, T, transforment cette forme en elle-même. Cependant, pour pouvoir appliquer la théorie de la base de M. Severi [2], il faudrait tout d'abord montrer que (C, Γ_1) est une base minima. Nous ne nous y arrêterons pas; bornons-nous à constater que la transformation T n'est pas périodique.

2. Projetons l'hyperquadrique Q d'un de ses points, n'appartenant pas à F, sur un hyperplan S_3. Aux sections hyperplanes de Q correspondent dans cet hyperplan les quadriques passant

(2) SEVERI, Complementi alla teoria della base per la totalità delle curve di una superficie algebrica (*Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo*, 1910, t. XXX).

par une conique γ. A la surface F correspond une surface F′, du sixième ordre, passant triplement par γ.

Aux courbes Γ_1, Γ_2 correspondent sur F′ des sextiques de genre deux s'appuyant en six points sur la conique γ.

Observons que les ∞^3 hyperquadratiques de S_4 passant par une courbe Γ_1 forment un système linéaire composé au moyen d'un système, d'indice un, de ∞^3 coniques s'appuyant en quatre points sur Γ_1. Les ∞^2 de ces coniques appartenant à Q sont projetées sur S_3 suivant des coniques, formant une congruence linéaire, s'appuyant en quatre points sur la projection de la courbe Γ_1 considérée et en deux points sur la conique γ.

On obtient ainsi une construction de l'involution d'ordre deux déterminée sur F′ par le réseau $|\Gamma_2|$, les coniques de la congruence linéaire considérée coupant F′ en deux points en dehors de Γ_1, γ.

De même, les coniques s'appuyant en quatre points sur une courbe Γ_2 de F′ et en deux points sur la conique γ forment une congruence linéaire découpant, sur F′, l'involution déterminée par le réseau $|\Gamma_1|$.

La congruence linéaire de coniques qui vient d'être rencontrée a été étudiée par Pieri (³) et par Montesano (⁴).

3. Imposons maintenant à la surface F de S_4 de posséder un point double conique O sur la courbe Γ_1. Ce point double O est équivalent à une courbe rationnelle de degré -2, que nous désignerons par γ et qui est rencontrée en un point par les courbes du réseau $|\Gamma_1|$.

Il existe encore sur F un second réseau de sextiques

$$\Gamma_2 \equiv 2C - \Gamma_1 - \gamma,$$

de genre deux, rencontrant en un point la courbe γ et chacune des courbes Γ_1 en des groupes de 9 points.

Projetons la surface F du point O sur un hyperplan S_3. Nous obtenons cette fois une surface F′ du quatrième ordre sur laquelle γ est une conique. Le plan de γ coupe encore F′ suivant une seconde conique γ_0 et les sections planes de F′ correspondent aux courbes C-γ de F. Il en résulte que les courbes C sont découpées sur F′ par les quadriques passant par γ_0.

(³) Pieri, Sopra alcune congruenze di coniche (*Atti della R. Accademia di Torino*, 1893, t. XXVIII).

(⁴) Montesano, Su i varii tipi di congruenze lineari di coniche dello spazio (*Rendiconti delle R. Accademia di Napoli*, 1895). Voir la seconde note, nº 2.

On a

$$C \equiv 2\gamma + \gamma_0$$

et la courbe $2\gamma + \gamma_0$ correspond à la section hyperplane de F ayant un point quadruple en O.

Sur la surface F′, les courbes Γ_1, Γ_2 sont des quintiques de genre deux. Ces quintiques s'appuient en un point sur γ et par suite en quatre points sur γ_0.

Les courbes 2 C sont découpées sur la surface F′ par les surfaces du quatrième ordre ayant la conique double γ_0. Celles de ces surfaces qui contiennent une courbe Γ_1 dégénèrent en le plan des coniques γ, γ_0 et en des surfaces cubiques passant par la courbe γ_0. Ces surfaces découpent, sur F′, les quintiques Γ_2 et inversement.

Une quintique de genre deux Γ_1 est située sur une quadrique qui rencontre encore F′ suivant une cubique gauche K_2 s'appuyant en trois points sur γ mais ne rencontrant pas γ_0. Observons que parmi les surfaces cubiques passant par γ_0 et une courbe Γ_1, il en est une formée du plan de γ_0 et de la quadrique passant par cette courbe Γ_1. Il en résulte que $K_2 + \gamma$ est une courbe Γ_2; on a donc

$$\Gamma_2 \equiv K_2 + \gamma.$$

Les courbes Γ_1 sont découpées sur F′ par les quadriques passant par la cubique gauche K_2 et par conséquent les couples de l'involution d'ordre deux déterminée par le réseau $|\Gamma_1|$ sur F′ sont découpés sur cette surface par les bisécantes de K_2.

De même, les courbes Γ_2 appartiennent à des quadriques passant par une cubique gauche K_1 de F′, rencontrant la conique γ en trois points. On a

$$\Gamma_1 \equiv K_1 + \gamma$$

et les cordes de K_1 découpent sur F′ les couples de point de l'involution déterminée par le réseau $|\Gamma_2|$.

Les cubiques gauches K_1, K_2 se rencontrent en cinq points et il existe donc une quadrique coupant F′ suivant ces cubiques et la conique γ. Ceci résulte d'ailleurs de la relation fonctionnelle

$$2(C - \gamma) \equiv K_1 + K_2 + \gamma,$$

que l'on déduit de

$$2\,C \equiv \Gamma_1 + \Gamma_2 + \gamma.$$

4. Appelons encore θ_1 la transformation birationnelle de F (ou F′) en elle-même génératrice de l'involution déterminée par le réseau $|\Gamma_1|$. Soient C', Γ'_1, γ', K'_2 les courbes que θ_1 fait correspondre respectivement à C, Γ_1, γ, K_2.

Nous avons $\Gamma'_1 \equiv \Gamma_1$ et, d'autre part, puisque les quadriques passant par K_2 découpent sur F' les courbes Γ_1,

$$2(C'-\gamma') - K'_2 \equiv 2(C-\gamma) - K_2.$$

Les bisécantes de K_2 s'appuyant sur γ engendrent la quadrique contenant les courbes K_1, K_2, γ et rencontrent donc F', en dehors de γ et de K_2, en des points de K_1. On a donc

$$\gamma' \equiv K_1.$$

Les cordes de K_2 s'appuyant sur une section plane $C-\gamma$ de F' engendrent une surface d'ordre 10 passant 5 fois par K_2 et coupant encore F' suivant la courbe $C'-\gamma'$ qui correspond à $C-\gamma$. On a donc

$$10(C-\gamma) \equiv C'-\gamma' + C - \gamma + 5K_2.$$

De ces différentes relations fonctionnelles, en tenant compte de

$$K_2 \equiv 2C - \Gamma_1 - 2\gamma,$$

on déduit

$$\left.\begin{aligned} C' &\equiv -C + 6\Gamma_1, \\ \Gamma'_1 &\equiv \Gamma_1, \\ \gamma' &\equiv \Gamma_1 - \gamma. \end{aligned}\right\} \qquad (\theta_1)$$

Envisageons maintenant la transformation θ_2, génératrice de l'involution déterminée par le réseau $|\Gamma_2|$. En appelant C', Γ'_2, γ' et Γ'_1 les courbes que θ_2 fait correspondre respectivement à C, Γ_2, γ et Γ_1, on a

$$\begin{aligned} C' &\equiv -C + 6\Gamma_2, \\ \Gamma'_2 &\equiv \Gamma_2, \\ \gamma' &\equiv \Gamma_2 - \gamma, \end{aligned}$$

c'est-à-dire

$$\left.\begin{aligned} C' &\equiv -11C - 6\Gamma_1 - 6\gamma, \\ \Gamma' &\equiv 18C - 10\Gamma_1 - 9\gamma, \\ \gamma' &\equiv 2C - \Gamma_1 - 2\gamma. \end{aligned}\right\} \qquad (\theta_2)$$

Quant à la transformation $T = \theta_1 \theta_2$, elle donne

$$\left.\begin{aligned} C' &\equiv -11C + 54\Gamma_1 + 6\gamma, \\ \Gamma'_1 &\equiv -18C + 89\Gamma_1 + 9\gamma, \\ \gamma' &\equiv -2C + 9\Gamma_1 + 2\gamma, \end{aligned}\right\} \qquad (T)$$

Sur F, les courbes C, Γ_1, γ forment une base de déterminant

$$\begin{vmatrix} 6 & 6 & 0 \\ 6 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 42.$$

La forme quadratique associée à cette base est

$$2(3\lambda^2 + \mu^2 - \nu^2 + 6\lambda\mu + \mu\nu).$$

Les substitutions

$$\lambda' = -\lambda, \mu' = 6\lambda + \mu + \nu, \nu' = -\nu;$$

$$\lambda' = -11\lambda + 18\mu + 2\nu, \mu' = -6\lambda - 10\mu - \nu, \nu' = -6\lambda - 9\mu - 2\nu;$$

$$\lambda' = -11\lambda - 18\mu - 2\nu, \mu' = 54\lambda + 89\mu + 9\nu, \nu' = 6\lambda + 9\mu + 2\nu$$

transforment cette forme quadratique en elle-même. Mais ici également, pour appliquer la théorie de M. Severi, il faudrait établir que la base (C, Γ_1, γ) est minima.

5. Supposons enfin que la surface F soit l'image d'une involution du second ordre appartenant à une surface de genres un ($p_a = P_4 = 1$). Elle possède donc huit points doubles coniques $O_1, O_2, \ldots, O_8$ et un réseau de sextiques Γ de genre deux, passant par ces points. De plus, il existe une hyperquadratique touchant la surface F le long de chacune des courbes du réseau $|\Gamma|$.

Chacun des points $O_1, O_2, \ldots, O_8$ est équivalent à une courbe rationnelle de degré -2; nous indiquerons ces courbes respectivement par $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_8$.

Si C désigne une section hyperplane de F, on a

$$2C \equiv 2\Gamma + \gamma_1 + \gamma_2 + \ldots + \gamma_8.$$

Projetons la surface du point O_1 sur un hyperplan. Il correspond à la surface F une surface F' du quatrième ordre sur laquelle γ_1 est une conique. Le plan σ de cette conique coupe encore F' suivant une conique γ'_1.

Aux sections hyperplanes C de F correspondent les sections de F' par les quadriques passant par la conique γ'_1; les sections planes de F' sont les courbes $C - \gamma_1$. Aux courbes Γ correspondent sur F' des quintiques de genre deux, que nous désignerons toujours par Γ, rencontrant en un point la conique γ_1 et en quatre points la conique γ'_1.

La surface F' possède sept points doubles coniques $O'_2, O'_3, \ldots, O'_8$, projections des points $O_2, O_3, \ldots, O_8$ de F. Aux sections de F par les hyperquadriques passant par $O_1, O_2, \ldots, O_8$ correspondent les sections de F' par des surfaces du quatrième ordre passant deux fois par la conique γ'_1 et passant, en outre, par les points O'_2, O'_3, .., O'_8. Comme il existe une hyperquadrique touchant F le long d'une courbe Γ, il existe une surface du quatrième ordre passant deux fois par γ'_1, une fois par les points O'_2, O'_3, .., O'_8 et touchant F' le long d'une courbe Γ. Une telle surface devant rencontrer le plan σ au point de Γ situé sur la conique γ_1, contient le plan σ comme partie. Il existe donc une surface cubique passant par γ'_1, par O'_2, O'_3, ..., O'_8, touchant F' le long d'une quintique Γ.

Une quintique Γ se trouve sur une quadrique coupant encore F' suivant une cubique gauche K s'appuyant en trois points sur γ_1 mais ne rencontrant pas γ'_1. Cette quadrique et le plan σ forment une surface cubique passant par γ'_1, O'_2, O'_3, ..., O'_8; la courbe $K+\gamma_1$ appartient donc au réseau $|\Gamma|$. Il existe donc une surface cubique passant par γ'_1, O'_2, O'_3, ..., O'_8, touchant la surface F' le long de la courbe $K+\gamma_1$. Cette surface cubique contient nécessairement le plan σ et est complétée par une quadrique Q' passant par γ_1 et touchant la surface F' le long de la cubique gauche K. Ce raisonnement est d'ailleurs valable, que la cubique gauche K soit irréductible ou non.

Supposons K irréductible. Une corde de K s'appuyant sur γ_1 appartient à Q' et touche donc F' en ses points d'appui sur K; elle coupe donc F' en cinq points et appartient à cette surface. Mais alors, la quadrique Q' fait partie de F', qui est donc réductible. Il en résulte que F est réductible, hypothèse à rejeter. Par conséquent, K ne peut être irréductible.

Le raisonnement précédent est toujours valable si K dégénère de telle sorte qu'il y ait des cordes de K s'appuyant sur cette courbe et sur γ_1 en des points distincts. Il faut donc que K dégénère en trois droites a_1, a_2, a_3 passant par un même point et s'appuyant sur γ_1. La quadrique Q' est alors un cône passant par γ_1, ayant son sommet au point de concours des droites a_1, a_2, a_3 et touchant F' le long de chacune de ces droites.

6. Les droites a_1, a_2, a_3 ne peuvent évidemment se trouver dans un même plan, par conséquent leur point de concours O' est double pour la surface F'.

Appelons α_1, α_2, α_3 les plans tangents au cône Q' respectivement le long des droites a_1, a_2, a_3. D'après ce que nous venons de voir, la surface F' touche le plan α_1 le long de a_1, le plan α_2 le long de a_2, le plan α_3 le long de a_3.

Un plan passant par a_1, par exemple, coupe F′ suivant la droite a_1 et suivant une cubique qui passe par O′. Les deux autres points de rencontre de cette cubique avec a_1 sont nécessairement doubles pour F′ et l'on voit ainsi qu'en dehors de O′, chacune des droites a_1, a_2, a_3 contient deux points doubles de F′.

Les quadriques passant par la cubique gauche $K = a_1 + a_2 + a_3$ découpent sur F′ les quintiques Γ; ces quadriques sont nécessairement des cônes de sommet O′. Il en résulte que les courbes Γ passent simplement par O′ et par les points doubles de F′ situés sur a_1, a_2, a_3. Ces sept points doubles sont donc les points O'_2, O'_3, ..., O'_8. Pour fixer les idées, nous supposerons que le point O'_2 coïncide avec O′, que O'_3, O'_4 sont sur a_1, O'_5, O'_6 sur a_2, O'_7, O'_8 sur a_3.

Appelons θ la transformation birationnelle involutive de F en elle-même engendrant l'involution déterminée par le réseau |Γ|, de degré deux. Les couples de θ sont découpés sur F′ par les droites passant par le sommet O'_2 du cône Q′.

Observons que le cône Q′, touchant F′ le long de a_1, a_2, a_3, doit coïncider avec le cône tangent à F′ en O'_2. Ce cône coupe encore F′ suivant γ_1, donc la conique γ_1 est la transformée par θ du domaine γ_2 du point O'_2. En d'autres termes, θ fait se correspondre les courbes γ_1 et γ_2.

Le plan a_2a_3 coupe F′ suivant les droites a_2, a_3 et une conique qui est transformée en elle-même par θ, donc les points O'_5 et O'_6, O'_7 et O'_8 se correspondent dans θ. Il en est de même des points O'_3 et O'_4. En d'autres termes, θ fait correspondre aux courbes γ_3, γ_5, γ_7 respectivement les courbes γ_4, γ_6, γ_8 et inversement.

Retournons maintenant à la surface F et modifions nos notations de la manière suivante : les points O_1, O_2 seront désormais désignés par O_{11}, O_{12}; les points O_3, O_4, par O_{21}, O_{22}; les points O_5, O_6 par O_{31}, O_{32}; enfin les points O_7, O_8 par O_{41}, O_{42}. La courbe équivalente à O_{ik} sera désignée par γ_{ik}.

La droite a_1 correspond à une conique F, passant par les points O_{11}, O_{12}, O_{21}, O_{22}; nous la désignerons par E_{12}. De même, a_2, a_3 correspondent à des coniques E_{13}, E_{14} passant la première par O_{11}, O_{12}, O_{31}, O_{32}, la seconde par les points O_{11}, O_{12}, O_{41}, O_{42}.

A la conique qui, avec a_2 et a_3, forme la section de F′ par le plan de ces deux droites, correspond sur F une conique E_{34} passant par les points O_{31}, O_{32}, O_{41}, O_{42}. De même, il existe sur F deux autres coniques E_{23}, E_{24} passant la première par les points O_{21}, O_{22}, O_{31}, O_{32}, la seconde par les points O_{21}, O_{22},

O_{41}, O_{42}. Ces six coniques sont transformées chacune en soi par la transformation θ.

Observons que les quatre droites $O_{11}O_{12}$, $O_{21}O_{22}$, $O_{31}O_{32}$, $O_{41}O_{42}$ se rencontrent deux à deux et ne peuvent se trouver dans un même plan; donc elles concourent en un point O. Ces droites n'appartiennent d'ailleurs pas à la surface F, ni, d'autre part, à un même hyperplan.

L'hyperplan contenant les droites $O_{11}O_{12}$, $O_{21}O_{22}$, $O_{31}O_{32}$ coupe la surface F suivant la courbe

$$C \equiv E_{23} + E_{13} + E_{12} + \gamma_{11} + \gamma_{12} + \gamma_{21} + \gamma_{22} + \gamma_{31} + \gamma_{32}.$$

E_{23}, E_{13}, E_{12} sont transformées en elles-mêmes par θ. D'autre part, θ échange entre elles γ_{11} et γ_{12}, γ_{21} et γ_{22}, γ_{31} et γ_{32}; donc θ transforme en elle-même la courbe C considérée et par suite laisse invariant le système linéaire des sections hyperplanes $|C|$. Il en résulte que θ est déterminée sur F par une homographie harmonique dont O est nécessairement un point uni.

Cela étant, observons que chaque courbe Γ contient six points unis de θ; donc θ possède une courbe unie. Si θ n'est pas une homologie de centre O, la courbe unie de θ est découpée sur F par un plan uni coupant chacune des courbes Γ en six points, ce qui est impossible, car ces courbes appartiendraient alors à des hyperplans et seraient des sections hyperplanes de F. Il en résulte que θ est une homologie harmonique de centre O, dont l'hyperplan uni ξ coupe F suivant une courbe C_0, unie pour θ.

7. L'hyperquadrique Q et l'hypersurface cubique W qui déterminent F par leur intersection sont transformées en elles-mêmes par l'homologie θ. Q ne peut passer par O et ξ est l'hyperplan polaire de O par rapport à Q.

Choisissons dans S_4 une figure de référence telle que l'homologie harmonique θ ait pour équations

$$x'_0 : x'_1 : x'_2 : x'_3 : x'_4 = x_0 : -x_1 : -x_2 : -x_3 : -x_4,$$

ce qui est toujours possible sans restreindre la généralité. L'hyperquadrique Q a alors pour équation

$$x_0^2 \alpha_0 + \alpha_2 (x_1, x_2, x_3, x_4) = 0, \tag{1}$$

α_0 étant une constante et α_2 une forme quadratique en x_1, x_2, x_3, x_4.

L'équation de l'hypersurface cubique W sera de la forme

$$x_0\,\beta_1(x_1, x_2, x_3, x_4) + \beta_3(x_1, x_2, x_3, x_4) = 0,$$

où β_1, β_3 sont des formes dont le degré est indiqué par l'indice.

L'hypersurface cubique

$$x_0\,\beta_1 + \beta_3 + (x_0^2\,\alpha_0 + \alpha_2)(\lambda_1 x_1 + \ldots + \lambda_4 x_4) = 0$$

passe également par F et peut remplacer W dans la définition de cette surface. En particulier, nous pouvons remplacer W par

$$\alpha_0(x_0\,\beta_1 + \beta_3) - (x_0^2\,\alpha_0 + \alpha_2)\,\beta_1 = 0,$$

c'est-à-dire par le cône W' de sommet O,

$$\alpha_0\,\beta_3 - \alpha_2\,\beta_1 = 0.$$

Cela étant, supposons que les droites $O_{11}O_{12}$, $O_{21}O_{22}$, $O_{31}O_{32}$, $O_{41}O_{42}$ aient respectivement pour équations $x_2 = x_3 = x_4 = 0$, $x_3 = x_4 = x_1 = 0$, $x_4 = x_1 = x_2 = 0$, $x_1 = x_2 = x_3 = 0$. L'hypersurface W doit toucher l'hyperquadrique Q aux points O_{11}, O_{12}, ..., O_{42}. Par suite, le cône W' doit passer doublement par les droites $O_{11}O_{12}$, ..., $O_{41}O_{42}$. En choisissant convenablement le point unitaire, ce cône aura donc pour équation

$$x_2\,x_3\,x_4 + x_3\,x_4\,x_1 + x_4\,x_1\,x_2 + x_1\,x_2\,x_3 = 0. \tag{2}$$

Les équations (1) et (2) représentent donc la surface F.

8. Rapportons projectivement les courbes Γ aux droites d'un plan ϖ. A la surface F correspond un plan double de support ϖ, ayant une courbe de diramation Δ du sixième ordre.

Puisque les courbes γ_{11}, γ_{12} sont rencontrées chacune en un point par les courbes Γ et que ces points se correspondent dans θ, à l'ensemble de ces courbes γ_{11}, γ_{12} correspond dans ϖ une droite r_1. De même, aux ensembles de courbes γ_{21} et γ_{22}, γ_{31} et γ_{32}, γ_{41} et γ_{42} correspondent respectivement des droites r_2, r_3, r_4 de ϖ.

Retournons un instant à la surface F'. Les courbes Γ sont découpées sur cette surface par les cônes du second ordre de sommet O'_2 passant par les droites a_1, a_2, a_3. Parmi ces cônes se trouvent ceux qui sont formés du plan a_2a_3 et d'un plan passant par a_1. Il en résulte que la conique E_{34} appartient à ∞^1 courbes Γ (formant un faisceau). Par suite, à cette conique correspond un point du plan ϖ et précisément le point R_{34} commun aux droites r_3, r_4, puisque E_{34} passe par O_{31}, O_{32}, O_{14}, O_{42}.

Plus généralement, à la conique E_{ik} correspond le point $R_{ik} = r_i r_k$.

La courbe unie de θ coupe la conique E_{ik} en deux points; par conséquent la courbe de diramation Δ du plan double a un point double en R_{ik}.

La surface F est donc birationnellement équivalente à un plan double dont la courbe de diramation, du sixième ordre, passe doublement par les sommets d'un quadrilatère complet.

9. Considérons, dans un plan α, la transformation quadratique involutive

$$z_1' : z_2' : z_3' = z_2 z_3 : z_3 z_1 : z_1 z_2 \tag{1}$$

et une courbe D, du sixième ordre, invariante pour cette transformation et ne passant pas par les points unis

$$(1, 1, 1), (-1, 1, 1), (1, -1, 1), (1, 1, -1)$$

de celle-ci. La courbe D a des points doubles aux sommets du triangle de référence; c'est une courbe anallagmatique.

Envisageons le plan double de support α, ayant la courbe D comme courbe de diramation. Ce plan double est de genres un ($p_a = P_4 = 1$). Il existe une surface Φ, de S_7, birationnellement équivalente au plan double, aux sections hyperplanes de laquelle correspondent soit les cubiques doubles de α circonscrites au triangle de référence, soit la courbe de diramation.

Posons

$$\begin{aligned}
\rho x_1 &= (z_2 + z_3)\,(z_3 - z_1)\,(z_1 - z_2),\\
\rho x_2 &= (z_2 - z_3)\,(z_3 + z_1)\,(z_1 - z_2),\\
\rho x_3 &= (z_2 - z_3)\,(z_3 - z_1)\,(z_1 + z_2),\\
\rho x_4 &= (z_2 + z_3)\,(z_3 + z_1)\,(z_1 + z_2),\\
\rho x_5 &= (z_2 - z_3)\,(z_3 + z_1)\,(z_1 + z_2),\\
\rho x_6 &= (z_2 + z_3)\,(z_3 - z_1)\,(z_1 + z_2),\\
\rho x_7 &= (z_2 + z_3)\,(z_3 + z_1)\,(z_1 - z_2).
\end{aligned}$$

On obtient ainsi, dans un espace S_6, les équations paramétriques d'une surface rationnelle φ_0, d'ordre six, dont les sections hyperplanes correspondent aux cubiques du plan α passant par les sommets du triangle de référence. Plongeons cet espace S_6 dans un espace S_7; les équations précédentes représentent un cône φ projetant la surface φ_0.

Considérons, dans S_7, l'homographie harmonique

$$\frac{x'_0}{x_0} = \frac{x'_1}{x_1} = \frac{x'_2}{x_2} = \frac{x'_3}{x_3} = \frac{x'_4}{x_4} = \frac{x'_5}{-x_5} = \frac{x'_6}{-x_6} = \frac{x'_7}{-x_7}, \qquad (2)$$

qui transforme le cône φ en soi et qui correspond à l'inversion (1) du plan α.

Cela étant, la surface Φ est l'intersection du cône φ et de l'hyperquadrique

$$x_0^2\varphi_0 + x_0\varphi_1(x_1, x_2, x_3, x_4) + \varphi_2(x_1, x_2, x_3, x_4) + \psi_2(x_5, x_6, x_7) = 0,$$

où φ_0, φ_1, φ_2, ψ_2 sont des formes dont le degré est indiqué par l'indice.

Observons que l'on a

$$x_6x_7 = x_1x_4, \qquad x_7x_5 = x_2x_4, \qquad x_5x_6 = x_3x_4,$$
$$x_5^2 + x_3x_4 + x_4x_2 + x_2x_3 = 0, \qquad x_6^2 + x_3x_4 + x_4x_1 + x_1x_3 = 0,$$
$$x_7^2 + x_2x_4 + x_4x_1 + x_1x_2 = 0.$$

On peut donc remplacer, dans l'équation précédente, $\psi_2(x_5, x_6, x_7)$ par une forme quadratique en x_1, x_2, x_3, x_4.

On peut en outre remplacer l'hyperplan $x_0=0$ par l'hyperplan polaire de O par rapport à l'hyperquadratique. Celle-ci a alors une équation de la forme

$$x_0^2 = \varphi_2(x_1, x_2, x_3, x_4).$$

Dans le plan α, la courbe de diramation D a pour équation $\varphi_2=0$, où x_1, x_2, x_3, x_4 sont remplacés en fonction de z_1, z_2, z_3.

L'homographie (2) possède deux axes ponctuels : l'espace $S_4(x_0, x_1, x_2, x_3, x_4)$ et un plan $S_2(x_5, x_6, x_7)$. L'axe S_4 coupe la surface Φ en huit points qui sont les points unis de l'involution I_2 d'ordre deux engendrée sur Φ par l'homographie. Ces huit points sont situés sur les droites

$$x_1 = x_2 = x_3 = x_5 = x_6 = x_7 = 0,$$
$$x_2 = x_3 = x_4 = x_5 = x_6 = x_7 = 0,$$
$$x_1 = x_3 = x_4 = x_5 = x_6 = x_7 = 0,$$
$$x_1 = x_2 = x_4 = x_5 = x_6 = x_7 = 0.$$

Pour obtenir une surface image de l'involution I_2, projetons la surface Φ de l'axe S_2 sur l'axe S_4. Nous obtenons la surface

$$x_2x_3x_4 + x_3x_4x_1 + x_4x_1x_2 + x_1x_2x_3 = 0,$$
$$x_0^2 = \varphi_2(x_1, x_2, x_3, x_4),$$

c'est-à-dire la surface F considérée plus haut.

Les courbes Γ correspondent aux sections de Φ par les hyperplans

$$\lambda_1 x_5 + \lambda_2 x_6 + \lambda_3 x_7 = 0.$$

Observons que l'on a

$$\frac{z_2 + z_3}{z_2 - z_3} = \frac{x_6}{x_3} = \frac{x_7}{x_2}, \quad \frac{z_3 + z_1}{z_3 - z_1} = \frac{x_5}{x_3} = \frac{x_7}{x_1}, \quad \frac{z_1 + z_2}{z_1 - z_2} = \frac{x_5}{x_2} = \frac{x_6}{x_1}.$$

On en déduit

$$\frac{x_5}{x_2 x_3} = \frac{x_6}{x_3 x_1} = \frac{x_7}{x_1 x_2}.$$

Par conséquent, les courbes Γ sont découpées sur F par les cônes

$$\lambda_1 x_2 x_3 + \lambda_2 x_3 x_1 + \lambda_3 x_1 x_2 = 0.$$

Les hyperquadriques de S_4 touchant F le long des courbes Γ sont données par

$$\lambda_1^2 x_2 x_3 + \lambda_2^2 x_3 x_1 + \lambda_3^2 x_1 x_2 + (\lambda_2 - \lambda_3)^2 x_1 x_4 + (\lambda_3 - \lambda_1)^2 x_2 x_4 + (\lambda_1 - \lambda_2)^2 x_3 x_4 = 0.$$

Projetons au contraire la surface Φ de l'axe S_4 sur le plan S_2, en observant que si l'on pose

$$x_5 = y_1, x_6 = y_2, x_7 = y_3, y_4 = -(y_1 + y_2 + y_3),$$

on a

$$x_1 : x_2 : x_3 : x_4 = y_2 y_3 y_4 : y_3 y_4 y_1 : y_4 y_1 y_2 : y_1 y_2 y_3.$$

On obtient le plan double de support ϖ considéré plus haut. La courbe de diramation Δ a pour équation

$$\varphi_2 (y_2 y_3 y_4, y_3 y_4 y_1, y_4 y_1 y_2, y_1 y_2 y_3) = 0,$$

les droites r_1, r_2, r_3, r_4 ayant pour équations

$$y_1 = 0, y_2 = 0, y_3 = 0, y_4 = 0.$$

Liége, le 16 juin 1945.

M. HAYEZ, Imprimeur de l'Académie royale de Belgique, rue de Louvain, 112, Bruxelles.
(Domicile légal : rue de la Chancellerie, 4)