Sonderabdruck aus „Mathematische Nachrichten"
18. Band, Heft 1—6, März—August 1958
Akademie-Verlag, Berlin

Une extension de la notion de congruences stratifiables

Au Professeur H. L. Schmid, en hommage

Par Lucien Godeaux à Liége

(Eingegangen am 20. 6. 1957)

Si (g), (g') sont deux congruences de droites, dont les paramètres des développables sont u, v, on dit que ces congruences sont stratifiables s'il existe sur la droite g une infinité de points engendrant des réseaux conjugués à la congruence tels que les plans tangents en ces points aux surfaces qu'ils engendrent passent par la droite g' [1]). Désignons par U, V les foyers de g et par A, B ceux de g' et supposons que V, B soient respectivement les transformés de Laplace de U, A dans le sens des u. Si les congruences sont stratifiables, le plan tangent au point U à la surface (U) passe par A et le plan tangent à la surface (V) en V passe par B. Si l'une de ces conditions est remplie, les congruences sont stratifiables. Deux congruences peuvent être stratifiables dans les deux sens.

Dans cette note, nous nous proposons de donner une généralisation de la notion de congruences stratifiables.

Nous considérons, dans un espace projectif S_r une suite de Laplace

$$\ldots, U_n, \ldots, U_1, U, V, V_1, \ldots, V_n, \ldots$$

dont chaque point est le transformé du précédent dans le sens des u. Soient en outre A, B les foyers d'une droite d'une congruence, B étant le transformé de Laplace de A dans le sens des u. Si le point A appartient à l'espace $U_n U_{n-1} \cdots V_{n-1}$ et le point B à l'espace $U_{n-1} U_{n-2} \cdots V_n$, nous dirons que la congruence (AB) est n-stratifiable à la congruence (UV).

Nous examinons ensuite le cas de deux congruences n-stratifiables dans les deux sens et en donnons une construction simple, ainsi que la condition qui les lie.

---

[1]) Cette notion est due à Fubini, Su alcune classi di congruenze di rette e sulle trasformazioni delle superficie R [Ann. di Mat. IV. Ser., **1**, 241—257 (1923/24)]. Le qualificatif *stratifiable* est dû à Bianchi, Sopra una classe di coppie di congruenze rettilinee stratificabili [Rend. Accad. Lincei V. Ser., **33**, 2° sem., 369—377 (1924)]. Voir aussi Finikoff, Sur les congruences stratifiables [Rend. Circolo Mat. Palermo **53**, 313—364 (1929)], Vincensini, Sur les congruences stratifiables [J. de Math. IX. Ser., **13**, 419—449 (1934)]; Sur certaines questions métriques liées aux congruences stratifiables [Ann. Fac. Sci. Toulouse III. Ser., **26**, 303—319 (1934)

Nous rappelons au début certaines formules concernant les suites de Laplace que l'on trouvera dans notre exposé sur *La Théorie des surfaces et l'espace réglé*[2]).

1. Considérons, dans un espace projectif S_r à r dimensions une suite de Laplace L définie par deux de ses points consécutifs U, V tels que

$$\frac{\partial U}{\partial u} + 2b\, V = 0, \quad \frac{\partial V}{\partial v} + 2a\, U = 0,$$

a, b étant des fonctions de u, v différentiables autant de fois qu'il est nécessaire et non identiquement nulles ni l'une ni l'autre.

Pour des raisons de simplicité typographique, nous écrirons

$$\frac{\partial^{h+k}\varphi}{\partial u^h\, \partial v^k} = \varphi^{hk}.$$

Les équations précédentes seront donc

$$U^{10} + 2\,a\, V = 0, \quad V^{01} + 2\,b\, U = 0. \tag{1}$$

Les transformés successifs de Laplace de U dans le sens des v sont

$$\begin{gathered} U_1 = U^{01} - U\,(\log b)^{01}, \quad U_2 = U_1^{01} - U_1\,(\log b\, h_1)^{01}, \dots, \\ U_n = U_{n-1}^{01} - U_{n-1}\,(\log b\, h_1 \cdots h_{n-1})^{01}, \end{gathered} \tag{2}$$

où l'on a posé

$$h_i = -(\log b\, h_1 \cdots h_{i-l})^{11} + h_{i-l}.$$

Les transformés de Laplace de V dans le sens des u sont successivement

$$\begin{gathered} V_1 = V^{10} - V\,(\log a)^{10}, \quad V_2 = V_1^{10} - V_1\,(\log a\, k_1)^{10}, \dots, \\ V_n = V_{n-1}^{10} - V_{n-1}\,(\log a\, k_1 \cdots k_{n-1})^{10}, \dots, \end{gathered} \tag{3}$$

où l'on a posé

$$k_i = -(\log a\, k_1 \cdots k_{i-1})^{11} + k_{i-1}.$$

La suite de Laplace L s'écrit

$$\dots, U_n, \dots, U_1, U, V, V_1, \dots, V_n, \dots, \tag{L}$$

chaque point étant le transformé du précédent dans le sens des u. Nous supposerons cette suite illimitée dans les deux sens.

Pour que le point $J = \lambda U - \mu V$ de la droite UV décrive un réseau conjugué à la congruence (UV), il suffit que l'on ait

$$\mu^{10} + 2\,b\,\lambda = 0, \quad \lambda^{01} + 2\,a\,\mu = 0. \tag{4}$$

Le point J appartient à une suite de Laplace $\mathfrak{J}$ inscrite dans la suite L. Les transformés de Laplace successifs de J dans le sens des v sont

$$J_1 = \mu\, U_1 - \mu_1 U, \quad J_2 = \mu_1 U_2 - \mu_2 U_1, \dots, J_n = \mu_{n-1} U_n - \mu_n U_{n-1}, \dots,$$

où l'on a

$$\begin{gathered} \mu_1 = \mu^{01} - \mu\,(\log b)^{01}, \quad \mu_2 = \mu_1^{01} - \mu_1\,(\log b\, h)^{01}, \dots, \\ \mu_n = \mu_{n-1}^{01} - \mu_{n-1}\,(\log b\, h_1 \dots h_{n-1})^{01}, \dots, \end{gathered} \tag{5}$$

[2]) Actual. sci. N° 138 (Paris, Hermann, 1934).

De même, les transformés de Laplace de J dans le sens des u sont successivement

$$J_{-1}=\lambda V_1-\lambda_1 V, \quad J_{-2}=\lambda_1 V_2-\lambda_2 V_1, \ldots, J_{-n}=\lambda_{n-1} V_n-\lambda_n V_{n-1}, \ldots,$$

où

(6) $$\lambda_1=\lambda^{10}-\lambda(\log a)^{10}, \quad \lambda_2=\lambda_1^{10}-\lambda_1(\log a k_1)^{10}, \ldots, \lambda_n =\lambda_{n-1}^{10}-\lambda_{n-1}(\log a k_1 \ldots k_{n-1}{}^{10}), \ldots .$$

2. Considérons l'espace à 2n dimensions déterminé par les points $U, U_1, \ldots, U_{2n}$, où nous supposons $2nr$. Tout point de cet espace peut être représenté par

$$\eta_0 U+\eta_1 U_1+\cdots+\eta_{2n} U_{2n}$$

et on peut considérer $\eta_0, \eta_1, \ldots, \eta_{2n}$ comme les coordonnées locales de ce point.

Donnons-nous un point A de coordonnées locales $\bar{\eta}_0, \bar{\eta}_1, \ldots, \bar{\eta}_{2n}$ et cherchons s'il peut exister un point J sur UV tel que le point A appartienne à l'espace $J_1 J_2 \cdots J_{2n}$.

L'équation locale de ce dernier espace est

$$\mu\eta_0+\mu_1\eta_1+\cdots+\mu_{2n}\eta_{2n}=0$$

et on doit avoir

$$\mu\bar{\eta}_0+\mu_1\bar{\eta}_1+\cdots+\mu_{2n}\bar{\eta}_{2n}-0.$$

Dans cette dernière équation, remplaçons $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_{2n}$ en fonction de μ en utilisant les équations (5); nous obtenons une équation de la forme

$$\mathfrak{A}_0\mu^{0\cdot 2n}+\mathfrak{A}_1\mu^{0\cdot 2n-1}+\cdots+\mathfrak{A}_{2n}\mu=0.$$

Nous pouvons considérer cette équation comme une équation différentielle linéaire où la variable indépendante est v. Soit

$$m_1(u,v), m_2(u,v), \ldots, m_{2n}(u,v)$$

un système fondamental de solutions. L'intégrale générale de l'équation peut s'écrire

(7) $$\mu=\varphi_1(u)\, m_1(u,v)+\varphi_2(u_2)\, m_2(u,v)+\cdots+\varphi_{2n}(u)\, m_{2n}(u,v),$$

$\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_{2n}$ étant des fonctions arbitraires de u.

En dérivant par rapport à u et en tenant compte de la première des équations (4), on a

(8) $$2b\lambda+\Sigma\varphi' m+\Sigma\varphi m^{10}=0.$$

En dérivant maintenant par rapport à v et en tenant compte de la seconde des équations (4), il vient

$$-4ab\mu+2b\lambda(\log b)^{01}+\Sigma\varphi' m^{01}+\Sigma\varphi m^{11}=0.$$

On en conclut

$$4ab\mu+(\log b)^{01}[\Sigma\varphi' m+\Sigma\varphi m^{10}]=\Sigma\varphi' m^{01}+\Sigma\varphi m^{11}.$$

Si nous choissisons arbitrairement $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_{2n-1}$ et que nous prenons pour φ_{2n} une solution de l'équation précédente, nous obtenons, par les relations (8) et (7) des valeurs de λ, μ satisfaisant aux équations (4).

On en conclut que l'on peut trouver le point J satisfaisant aux conditions imposées. D'une manière plus précise, on peut trouver $2n$ points J indépendants satisfaisant aux conditions imposées. Nous désignerons ces points par $J^{(1)}, J^{(2)}, \ldots, J^{(2n)}$ et les transformés successifs de Laplace de $J^{(i)}$ dans le sens des v seront désignés par $J_1^{(i)}, J_2^{(i)}, \ldots$, dans le sens des u par $J_{-1}^{(i)}, J_{-2}^{(i)}, \ldots$.

Nous écrirons $J^{(i)} = \lambda^{(i)} U - \mu^{(i)} V$.

3. Supposons que le point A décrive un réseau conjugué (u, v). Alors le point A, qui est l'intersection des espaces

$$J_1^{(1)} J_2^{(1)} \cdots J_{2n}^{(1)}, J_1^{(2)} J_2^{(2)} \cdots J_{2n}^{(2)}, \ldots, J_1^{(2n)} J_2^{(2n)} \cdots J_{2n}^{(2n)}$$

a pour transformé de Laplace dans le sens des u l'intersection des espaces

$$J^{(1)} J_1^{(1)} \cdots J_{2n-1}^{(1)}, J^{(2)} J_1^{(2)} \cdots J_{2n-1}^{(2)}, \ldots, J^{(2n)} J_1^{(2n)} \cdots J_{2n-1}^{(2n)},$$

c'est-à-dire un point appartenant à l'espace $V U U_1 \cdots U_{2n-1}$.

Le point A détermine une suite de Laplace $\mathfrak{A}$ inscrite dans le «polyèdre» dont les faces sont les espaces à $2n$ dimensions déterminés par $2n + 1$ points consécutifs de la suite L.

Appelons A_0 le point de la suite $\mathfrak{A}$ situé dans l'espace

$$U_n U_{n-1} \cdots U V \cdots V_{n-1}$$

et B_0 le point situé dans l'espace $V_n V_{n-1} \cdots V U \cdots U_{n-1}$. Le point B_0 est le transformé de Laplace de A_0 dans le sens des u et A_0 celui de B_0 dans le sens des v.

Pour $n = 1$, le point A_0 appartient au plan $U_1 U V$ et le point B_0 au plan $V_1 V U$. Les congruences $(A_0 B_0)$ et $(U V)$ sont stratifiables dans un sens. Pour n quelconque, nous dirons que la congruence $(A_0 B_0)$ est n-stratifiable à la congruence $(U V)$.

Nous désignerons par $A_1, A_2, \ldots$ les transformés successifs de Laplace de A_0 dans le sens des v, par $B_1, B_2, \ldots$ ceux de B_0 dans le sens des u. En particulier, le point que nous avions désigné tantôt par A devient le point A_n. D'une manière générale, le point A_i appartient à l'espace

$$U_{n+i} \cdots V_{n-i-1}$$

et le point B_i à l'espace $V_{n+i} \cdots U_{n-i-1}$.

Observons que la congruence $(A_0 A_1)$ est n-stratifiable à la congruence $(U U_1)$ et ainsi de suite.

4. Nous allons maintenant définir une construction de la congruence $(A_0 B_0)$.

Imaginons un espace projectif S_{r+2n} à $r+2n$ dimensions contenant l'espace S_r, ce dernier appartenant à la figure de référence. Appelons S_{2n-1} l'espace linéaire appartenant à la figure de référence et ne rencontrant pas S_r. Si P est un point de S_{r+2n} et P' sa projection à partir de S_{2n-1} sur S_r, nous prendrons pour les $r+1$ premières coordonnées homogènes de P les coordonnées déjà choisies pour P'.

Cela étant, considérons dans S_{r+2n} le point $\overline{U}$ dont les $r+1$ premières coordonnées sont celles de U et les $2n$ restantes les nombres $\mu^{(1)}, \mu^{(2)}, \ldots, \mu^{(2n)}$. Soit de même $\overline{V}$ le point dont les $r+1$ premières coordonnées sont celles de V et les autres les nombres $\lambda^{(1)}, \lambda^{(2)}, \ldots, \lambda^{(2n)}$. En vertu des relations (1) et (4), les points $\overline{U}$, $\overline{V}$ sont transformés de LAPLACE l'un de l'autre et définissent une suite de LAPLACE $\overline{L}$ que nous écrirons

$$(\overline{L}) \qquad \ldots, \overline{U}_n, \ldots, \overline{U}_1, \overline{U}, \overline{V}, \overline{V}_1, \ldots, \overline{V}_n, \ldots.$$

Il est bien clair que la suite L est la projection, à partir de S_{2n-1} sur S_r, de la suite $\overline{L}$.

Considérons l'espace à $2n$ dimensions $\overline{U}_n \overline{U}_{n-1} \cdots \overline{U}\,\overline{V} \cdots \overline{V}_{n-1}$. On voit immédiatement qu'il coupe S_r au point A_0. De même, l'espace à $2n$ dimensions $V_n \cdots U_{n-1}$ coupe S_r au point B_0.

Plus généralement, les points de la suite $\mathfrak{A}$ sont les sections de S_r par les espaces à $2n$ dimensions déterminés par $2n+1$ points consécutifs de la suite $\overline{L}$. On a ainsi une construction simple d'une congruence $(A_0 B_0)$ n-stratifiable à une congruence $(U V)$.

On considère dans un espace projectif S_{r+2n} à $r+2n$ dimensions une suite de Laplace $\overline{L}$ et deux espaces S_r, S_{2n-1} ne se rencontrant pas. La projection de la suite $\overline{L}$ à partir de S_{2n-1} sur S_r est une suite de LAPLACE *L et l'intersection avec S_r de l'espace à $2n+1$ dimensions détermines par les points $\overline{U}_n \cdots \overline{V}_n$ est une droite engendrant une congruence n-stratifiable à la congruence $(U V)$* [3]).

5. Proposons-nous maintenant de voir dans quelles conditions les congruences $(U V)$, $(A_0 B_0)$ sont doublement n-stratifiables.

Pour qu'il en soit ainsi, il faut que l'espace $A_n \cdots B_{n-1}$ contienne le point U et que l'espace $B_n \cdots A_{n-1}$ contienne le point V. La première condition entraîne la seconde et que la suite L est inscrite dans le «polyèdre de LAPLACE» dont les faces sont déterminées par $2n+1$ points consécutifs de la suite $\mathfrak{A}$.

L'espace $A_n \cdots B_{n-1}$ est l'intersection de S_r avec l'espace à $4n$ dimensions déterminés par les points $\overline{U}_{2n}, \ldots, \overline{V}_{2n-1}$. Le premier doit contenir le point U et le second le point $\overline{U}$, donc aussi le point U. Le second espace contient

[3]) On utilise implicitement ici le fait qu'une homographie fait correspondre une suite de Laplace à une suite de Laplace, ce qui permet de supposer que les espace S_r, S_{2n-1} sont des espaces opposés de la figure de référence.

donc la droite $U\overline{U}$. Soit U' l'intersection de la droite $U\overline{U}$ avec S_{2n-1}. L'espace $\overline{U}_{2n}\cdots\overline{V}_{2n-1}$ rencontre donc S_{2n-1} en un point U' au moins.

L'espace à $4n$ dimensions $\overline{U}_{2n-1}\cdots\overline{V}_{2n}$ coupe l'espace S_r suivant l'espace $A_{n-1}\cdots B_n$ et doit contenir les points $V, \overline{V}$, donc la droite $V\overline{V}$. Soit V' l'intersection de cette droite avec S_{2n-1}. L'espace $\overline{U}_{2n-1}\cdots\overline{V}_{2n}$ coupe S_{2n-1} suivant le point V' au moins.

Appelons ξ_i l'espace à $2n$ dimensions déterminé par les points $A_{n+i}, \ldots, B_{n-i-1}$ et ξ_i' l'espace à $4n$ dimensions déterminés par les points $\overline{U}_{2n+i}, \ldots, \overline{V}_{2n-i-1}$ (Si $i > n-1$, B_{n-i-1} doit être remplacé par A_{i-n} et si $i > 2n-1$, $\overline{V}_{2n-i-1}$ doit être remplacé par $\overline{U}_{i-2n}$).

L'espace ξ_i' coupe S_r suivant ξ_i et cet espace doit contenir le point U_i. Par conséquent l'espace ξ_i' contient U_i et $\overline{U}_i$, donc la droite $U_i\overline{U}_i$. Celle-ci coupe S_{2n-1} en un point U_i' et ξ_i' rencontre donc S_{2n-1} en un point U_i' au moins.

6. Supposons que l'espace ξ_1' rencontre l'espace S_{2n-1} suivant un espace à $k > 0$ dimensions. Alors, ces deux espaces appartiennent à un espace à $6n-k-1$ dimensions. Ce dernier rencontre S_r suivant un espace à $4n-k-1$ dimensions qui contient les projections sur S_r à partir de S_{2n-1} des points $\overline{U}_{2n}\cdots\overline{V}_{2n-1}$, c'est-à-dire les points $U_{2n}, \ldots, V_{2n-1}$. Mais alors, il y a une relation linéaire entre $4n-k+1$ de ces $4n+1$ points et la suite L appartient tout entière à l'espace à $4n-k-1$ dimensions. On a donc $r = 4n-k-1$. On observera que l'on doit avoir $k < 2n-1$, car on a supposé $2n < r$.

On voit immédiatement que la suite $\overline{L}$ appartient tout entière à l'espace à $6n-k-1$ dimensions déterminé par ξ_1' et S_{2n-1}; on en conclut que chacun des espaces ξ_i' coupe S_{2n-1} suivant un espace à k dimensions.

7. Supposons maintenant che chacun des espaces $\xi_1', \xi_2', \ldots, \xi_i', \ldots$ coupe S_{2n-1} en un seul point, respectivement $V', U', \ldots, U_i', \ldots$.

Observons que les points $V', U', \ldots, U_i', \ldots$ sont les projections sur S_{2n-1} à partir de S_r des points $\overline{V}, \overline{U}, \ldots, \overline{U}_i, \ldots$, ils se succèdent donc dans une suite DE LAPLACE et sont distincts.

L'espace ξ_1' et l'espace S_{2n-1} se coupent en un seul point appartiennent à un espace S_{6n-1} à $6n-1$ dimensions.

L'espace ξ_2' rencontre l'espace ξ_1' suivant un espace à $4n-1$ dimensions déterminé par les points $\overline{U}_{2n}, \ldots, \overline{V}_{2n-2}$ et l'espace S_{2n-1} en un point U_1' distinct de U'; il est donc contenu entièrement dans cet espace. Le même raisonnement montre que les espaces $\xi_3', \xi_4', \ldots$ appartiennent également à S_{6n-1}. On a donc $r + 2n = 6n-1$ et $r = 4n-1$.

De tout ceci, on conclut que *La condition nécessaire et suffisante pour que deux congruences* (UV), $(A_0 B_0)$ *soient doiblement n-stratifiables est que l'espace* $\overline{U}_{2n} \cdots \overline{V}_{2n-1}$ *coupe l'espace* S_{2n-1} *en un point situé sur la droite* $U\overline{U}$.

Pour $n = 1$, on retrouve une théorème que nous avons établi récemment dans une note: *Remarques sur les couples de congruences stratifiables* en cours d'impression dans les Rendiconti del Seminario Matematico di Torino.

8. La condition trouvée s'exprime analytiquement d'une manière fort simple. Nous la donnerons pour plus de simplicité dans l'hypothèse où les espaces $\xi_1', \xi_2', \ldots, \xi_i', \ldots$ rencontrent S_{2n-1} chacun en un seul point.

Désignons par $x^1, x^2, \ldots, x^{6n}$ les coordonnées d'un point de S_{6n-1} de telle sorte que l'espace $S_r = S_{4n-1}$ ait pour équations $x^{4n+1} = \cdots = x^{6n} = 0$.

Le point de rencontre de S_{2n-1} avec ξ_1' est donné par

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & x^{4n+1} & x^{4n+2} & \cdots & x^{6n} \\ U_{2n}^1 & U_{2n}^2 & \cdots & U_{2n}^{4n} & \mu_{2n}^{(1)} & \mu_{2n}^{(2)} & \cdots & \mu_{2n}^{(2n)} \\ U_{2n-1}^1 & U_{2n-1}^2 & \cdots & U_{2n-1}^{4n} & \mu_{2n-1}^{(1)} & \mu_{2n-1}^{(2)} & \cdots & \mu_{2n-1}^{(2n)} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ V_{2n-1}^1 & V_{2n-1}^2 & \cdots & V_{2n-1}^{4n} & \lambda_{2n-1}^{(1)} & \lambda_{2n-1}^{(2)} & \cdots & \lambda_{2n-1}^{(2n)} \end{vmatrix} = 0.$$

$$x^1 = x^2 = \cdots = x^{4n} = 0.$$

Les coordonnées du point U' où la droite $U\overline{U}$ coupe S_{2n-1} sont

$$0, 0, \ldots, 0, \mu^{(1)}, \mu^{(2)}, \ldots, \mu^{(2n)}.$$

La condition est donc

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & \mu^{(1)} & \mu^{(2)} & \cdots & \mu^{(2n)} \\ U_{2n}^1 & U_{2n}^2 & \cdots & U_{2n}^{4n} & \mu_{2n}^{(1)} & \mu_{2n}^{(2)} & \cdots & \mu_{2n}^{(2n)} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ U_1^1 & U_1^2 & \cdots & U_1^{4n} & \mu_1^{(1)} & \mu_1^{(2)} & \cdots & \mu_1^{(2n)} \\ U^1 & U^2 & \cdots & U^{4n} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ V^1 & V^2 & \cdots & V^{4n} & \lambda^{(1)} & \lambda^{(2)} & \cdots & \lambda^{(2n)} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ V_{2n-1}^1 & V_{2n-1}^2 & \cdots & V_{2n-1}^{4n} & \lambda_{2n-1}^{(1)} & \lambda_{2n-1}^{(2)} & \cdots & \lambda_{2n-1}^{(2n)} \end{vmatrix} = 0.$$