COSTRUZIONE DI SUPERFICIE ALGEBRICHE IRREGOLARI

Di L. Godeaux, Liegi.

In alcuni lavori abbiamo cercato di costruire superficie irregolari rappresentanti involuzioni appartenenti alla superficie immagine delle coppie di punti non ordinati di una curva algebrica [1]. Se L è una curva algebrica contenente una involuzione ciclica γ_p di ordine p, la superficie F rappresentante le coppie di punti non ordinate della curva L contiene una involuzione ciclica I di ordine p. Se l'involuzione γ_p non è razionale, una superficie immagine della involuzione I è irregolare. Vogliamo, in questa nota, esporre i risultati ottenuti ed altri nuovi.

1\. - Consideriamo una curva algebrica L di genere π, contenente una involuzione ciclica γ_p di ordine primo $p=2\nu+1$ maggiore di due. Diciamo τ la trasformazione birazionale di L in sè generatrice della involuzione γ_p, L' una curva immagine della involuzione γ_p e π' il suo genere. Supporremo $\pi'>0$ e che la curva L' non sia iperellittica salvo se $\pi'=2$.

Il numero δ dei punti uniti di γ_p è dato dalla formula di Zeuthen,

$$(p-1)\delta=2(\pi-1)-2p(\pi'-1).$$

Indichiamo con F la superficie che rappresenta le coppie di punti non ordinati della curva L e con F' la superficie analoga relativa alla curva L' [2].

Essendo $A_1, A_2, \ldots, A_p$ e $A_1', A_2', \ldots, A_p'$ due gruppi della involuzione γ_p sopra L, diciamo A_{ik} il punto della superficie F rappresentante la coppia di punti A_i, A_k', e consideriamo il gruppo di p^2 punti

$$\begin{array}{l} A_{11}, A_{12}, \ldots, A_{1p}, \\ A_{21}, A_{22}, \ldots, A_{2p}, \\ \ldots\ldots\ldots \\ A_{p1}, A_{p2}, \ldots, A_{pp}. \end{array}$$

Questo gruppo è completamente determinato da uno qualunque dei suoi punti, dunque abbiamo sulle superficie F una involuzione J di ordine p^2 di cui la superficie F' è evidentemente l'immagine.

Osserviamo che ai punti A_i, A_k' di L, τ fa corrispondere i punti A_{i+1}, A'_{k+1}, dunque esiste una trasformazione birazionale T di F in sè che fa corrispondere il punto $A_{i+1,k+1}$ al punto A_{ik}. Questa trasformazione è ciclica di periodo p e genera sopra F una involuzione I di ordine p.

Un gruppo della involuzione J contiene p gruppi della involuzione I, dunque se noi chiamiamo Φ una superficie immagine della involuzione I, ad ogni gruppo di J corrisponde sopra Φ un gruppo di p punti che formano una involuzione J'. Una immagine della involuzione J' è la superficie F'.

Come si sa, l'irregolarità della superficie F è eguale a π e quella di F' a π'. Dunque, l'irregolarità della superficie Φ è compresa fra π' e π.

2. - Sulla superficie F, i punti che rappresentano le coppie di punti di cui l'uno è fisso, generano una curva H di genere π. Si ha così sulla superficie F un sistema $\{H\}$ di grado uno e di indice due. Sia K la curva di F che rappresenta le coppie di punti di L formate da due punti sovrapposti. Questa curva, di genere π, è l'inviluppo del sistema $\{H\}$.

Essendo $A_1, A_2, \ldots, A_p$ un gruppo di γ_p, le curve H relative a questi punti si incontrano ancora in $p\nu$ punti rappresentanti le coppie di punti distinti del gruppo considerato. Quando varia questo gruppo, questi punti generano una curva K_1.

Diciamo $H_1, H_2, \ldots, H_\delta$ le curve H relative ai δ punti uniti della involuzione $\gamma_p, O_1, O_2, ..., O_\delta$ i punti di contatto di queste curve colla curva K, O_{ik} il punto comune alle curve H_i, H_k.

I δ punti $O_1, O_2, ..., O_\delta$ e gli $\frac{1}{2}\delta(\delta-1)$ punti $O_{12}, O_{13}, ..., O_{\delta-1,\delta}$ sono punti uniti della involuzione I e questa involuzione non possiede altri punti uniti.

Vediamo quali sono le curve unite della involuzione J.

Siano $H^1, H^2, ..., H^p$ ed $H'^1, H'^2, ..., H'^p$ le curve H corrispondenti ai punti $A_1, A_2, ..., A_p$ ed $A_1', A_2', ..., A_p'$ di due gruppi di γ_p. Le curve H^i tagliano le curve H'^k nei punti di un gruppo di J. Se il gruppo $A_1, A_2, ..., A_p$ si riduce ad un punto unito di γ_p, i p^2 punti del gruppo di J si riducono ad un gruppo di p punti di I. Dunque, le curve $H_1, H_2, ..., H_\delta$ sono curve unite della involuzione J, da contare p volte.

Se il gruppo $A_1', A_2', ..., A_p'$ coincide col gruppo $A_1, A_2, ..., A_p$, il gruppo di J si riduce ad un gruppo di p punti di I sulla curva K ed al gruppo dei punti comuni a due curve $H_1, H_2, ..., H_p$, da contare due volte. La curva K_1 è dunque una curva unita della involuzione J. Osserviamo che il gruppo dei $p\nu$ punti comuni a due curve $H_1, H_2, ..., H_p$ contiene ν gruppi di I.

Diciamo, sulla superficie F', H' le curve che rappresentano i gruppi di L' di cui un punto è fisso e K' l'inviluppo del sistema $\{H'\}$.

Il sistema $\{H\}$ è mutato in sè della trasformazione birazionale T di F in sè, generatrice della involuzione I. Consideriamo una curva H. A questa curva corrisponde sulla superficie Φ una curva $\overline{H}$ di genere π. Sulla curva H, vi sono ν coppie di punti appartenenti a gruppi di I, dunque la curva $\overline{H}$ possiede ν punti doppi. Il luogo di questi punti è la curva $\overline{K}_1$ omologa di K_1. Diciamo $\overline{K}$ la curva, di genere π', corrispondente ai gruppi di I della curva K.

Ad una curva H' corrisponde sulla Φ una curva $\overline{H}$. Al punto di contatto di H' colla curva K' corrisponde sulla Φ un punto della curva $\overline{K}$ ed i ν punti doppi di $\overline{H}$, da contare due volte.

Ad una curva canonica C' di F' corrisponde sulla Φ una curva $\overline{C}_0$ e sulla F una curva C_0. Se noi diciamo $\overline{H}_1, \overline{H}_2, ..., \overline{H}$ le curve di Φ che corrispondono alle curve $H_1, H_2, ..., H_\delta$, queste curve sono curve unite, da contare p volte, della involuzione J'. La curva unita di J' contiene la curva $\overline{K}_1$ e le curve $\overline{H}_1, \overline{H}_2, ..., \overline{H}_\delta$;

dunque, per il teorema di CASTELNUOVO, la curva

$$\bar{C}_0 + (p-1)(\bar{H}_1 + \bar{H}_2 + \ldots + \bar{H}_\delta) + \lambda \bar{K}_1$$

è una curva canonica di Φ, essendo λ un intero positivo.

Ne deduciamo che la curva

$$C_0 + (p-1)(H_1 + H_2 + \ldots + H_\delta) + \lambda K_1$$

è una curva canonica di F.

Una curva canonica C' di F' taglia una curva H' in $2\pi' - 3$ punti ed una curva canonica di F taglia una curva H in $2\pi - 3$ punti. Dunque la curva unita di J taglia una curva H in

$$2\pi - 3 - p(2\pi' - 3) = (p-1)(\delta + 1)$$

punti. Dobbiamo dunque avere

$$(p-1)\delta + (p-1)\lambda = (p-1)(\delta+1) ,$$

perchè la curva K_1 incontra una curva H in $p-1$ punti. Abbiamo quindi $\lambda = 1$.

La curva

$$\bar{C}_0 + (p-1)(\bar{H}_1 + \bar{H}_2 + \ldots + \bar{H}_\delta) + \bar{K}_1$$

è una curva canonica di Φ e la curva

$$C_0 + (p-1)(H_1 + H_2 + \ldots + H_\delta) + K_1$$

una curva canonica di F.

3. - Esaminiamo adesso la struttura dei punti uniti della involuzione I.

Consideriamo sulla curva L una serie lineare completa, non speciale, $|D_1|$. A questa serie, τ e le sue potenze fanno corrispondere serie lineari $|D_2|$, $|D_3|$, ..., $|D_p|$. La serie completa

$$|D| = |D_1 + D_2 + \ldots + D_p|$$

è mutata in sè da τ e contiene una serie lineare parziale senza punti fissi, di cui tutti i gruppi sono mutati in sè da τ. La serie $|D|$ contiene ancora altre serie parziali di cui gruppi sono mutati in sè da τ, ma queste serie possono avere punti fissi, uniti da γ_p. Diciamo r la dimensione della serie $|D|$ e rapportiamo i gruppi D agli iperpiani di uno spazio S_r. Alla curva L corrisponde una curva $\overline{L}$, normale, sulla quale l'involuzione γ_p è determinata da una omografia che sarà ancora chiamata τ. Se r_0 è la dimensione della serie parziale di $|D|$ senza punti fissi di cui sopra, la omografia τ possiede un asse puntuale σ di dimensione r_0. Gli iperpiani passanti per gli altri assi di τ tagliano sulla $\overline{L}$ una serie senza punti fissi, dunque i punti uniti di γ_p si trovano tutti sull'asse σ.

Consideriamo due di questi punti uniti A_i, A_k. Le tangenti a_i, a_k alla curva $\overline{L}$ in questi punti sono unite per la omografia τ e dunque si appoggiano sopra assi di τ. Dobbiamo esaminare due casi:

1°) Le tangenti a_i, a_k si appoggiano in punti A_i', A_k' di uno stesso asse di τ;

2°) La tangente a_i si appoggia in un punto A_i' sopra un asse e la tangente a_k in un punto A_k' sopra un altro asse di τ.

Esaminiamo il primo caso. Lo spazio $A_iA_kA_i'A_k'$ è unito per τ ed in questo spazio, τ determina una omografia biassiale τ' di cui gli assi sono le rette A_iA_k ed $A_i'A_k'$. Consideriamo una rigata luogo di corde della curva L contenente la retta A_iA_k. Fra le quadriche tangenti a questa rigata lungo la retta A_iA_k, si trovano le quadriche passanti per le rette A_iA_k, A_iA_i', A_kA_k'.

Nello spazio $A_iA_kA_i'A_k'$, prendiamo come tetraedro di riferimento il tetraedro di cui i vertici sono $A_i(1,0,0,0)$, $A_k(0,1,0,0)$, $A_i'(0,0,1,0)$, $A_k'(0,0,0,1)$. Le quadriche di cui sopra hanno per equazione

$$\lambda_1x_1x_4+\lambda_2x_2x_3+\lambda_3x_3x_4=0 \tag{1}$$

e l'omografia τ',

$$x_1':x_2':x_3':x_4'=x_1:x_2:\varepsilon x_3:\varepsilon x_4$$

dove ε è una radice primitiva di ordine p della unità.

Alla quadrica (1), τ' fa corrispondere la quadrica

$$\lambda_1 x_1 x_4 + \lambda_2 x_2 x_3 + \lambda_3 \varepsilon x_3 x_4 = 0 \tag{2}$$

che tocca la prima nei punti della retta $A_i A_k$.

Ne concludiamo che ad una curva tracciata sopra F e passante per O_{ik}, T fa corrispondere una curva che tocca la prima nel punto O_{ik}. Dunque, i punti infinitamente vicini di O_{ik} sono uniti per T. O_{ik} è un punto unito di prima specie dell'involuzione I [3].

Esaminiamo il secondo caso. Collo stesso tetraedro di riferimento, la omografia τ' è rappresentata da

$$x_1' : x_2' : x_3' : x_4' = x_1 : x_2 : \varepsilon x_3 : \varepsilon^a x_4 \ ,$$

dove a è un numero intero compreso tra 1 e p.

Alla quadrica (1), τ' fa corrispondere la quadrica

$$\lambda_1 \varepsilon^{a-1} x_1 x_4 + \lambda_2 x_2 x_3 + \lambda_3 \varepsilon^a x_3 x_4 = 0 \ . \tag{3}$$

I piani tangenti in un punto $(y_1, y_2, 0, 0)$ della retta $A_i A_k$ alle quadriche (1) e (3) hanno rispettivamente per equazioni

$$\lambda_2 y_2 x_3 + \lambda_1 y_4 x_1 = 0 \ , \qquad \lambda_2 y_2 x_3 + \varepsilon^{a-1} \lambda_1 y_4 x_1 = 0 \ .$$

Si vede che il punto unito O_{ik} è adesso un punto unito di seconda specie. Nell'intorno del primo ordine di questo punto, T dà una omografia generata da

$$\lambda' : \mu' = \varepsilon\lambda : \varepsilon^a \mu \ .$$

I due punti uniti di T, infinitamente vicini di O_{ik}, si trovano sulle curve H_i, H_k. Si sa che la conoscenza di a basta per determinare la struttura del punto O_{ik} [4].

4. - Consideriamo adesso il punto unito O_i.

Questo punto appartiene alle curve K ed H_i che ivi si toccano ed hanno dunque in comune un punto O_i' infinitamente vicino ad O_i, unito per la involuzione I.

Rammentiamo un punto stabilito nella teoria dei punti uniti di seconda specie. Se P è uno di questi punti per una involuzione, diciamo P_1 uno dei sui punti uniti infinitamente vicini e supponiamo che questo punto non sia unito di prima specie. Allora vi sono due punti P_2, P_2' uniti infinitamente vicini di P_1. Consideriamo una curva M appartenente alla involuzione e passante per P, P_1. Un ramo lineare della curva M, di origine P, passa per uno solo dei punti P_2, P_2', ad esempio per P_2. E questo punto è sempre lo stesso per tutte le curve appartenenti alla involuzione e passanti per P, P_1.

Nel nostro caso, il punto O_i è origine di due rami lineari, l'uno sulla curva K, l'altro sulla curva H_i e questi rami non passano per uno stesso punto infinitamente vicino ad O_i'. Ne deduciamo che il punto O_i' è unito di prima specie per la involuzione I.

Consideriamo sulla curva L una serie lineare di dimensione uno, di cui è doppio il punto unito di γ_p, corrispondente al punto O_i. Se questa serie non è trasformata in sè da τ, la curva corrispondente sulla F non è trasformata in sè da T. Questa curva passa per O_i e la sua trasformata non la tocca nel punto O_i. Dunque, nell'intorno del punto O_i, T non dà l'identità e O_i è punto unito di seconda specie, ma vi è un punto unito di prima specie in questo intorno. Abbiamo dimostrato altrove che T dà nell'intorno di O_i, la omografia

$$\lambda' : \mu' = \varepsilon\lambda : \varepsilon^2\mu \ .$$

Osserviamo che se O è un punto unito di seconda specie di una involuzione, ciascuno dei punti uniti infinitamente vicini ad O nell'intorno di primo ordine appartiene ad un solo ramo lineare di origine O, sopra una curva appartenente alla involuzione salvo se il punto considerato è unito di prima specie. Ora, il punto O_i è origine di almeno due rami lineari di origine O_i, l'uno sopra la curva K, l'altro sulla curva H_i. Ne concludiamo che O_i' è un punto unito di prima specie per I.

5. - Le curve canoniche C di F trasformate delle curve canoniche $\overline{C}$ di Φ passano $p-2$ volte per un punto unito di prima specie ed hanno, in un punto unito di seconda specie, una moltiplicità inferiore a $p-2$ [5]. Abbiamo visto che le curve C, trasformate delle curve canoniche C' di F', aumentate della curva unita di J, passano $2(p-1)$ volte per i punti uniti O_{ik} e $p-1$ volte per i punti uniti O_i. Dunque è probabile che le curve canoniche C di F,

trasformate delle curve canoniche $\overline{C}$ di Φ, appartengano ad un sistema più ampio che $|C_0|$.

Supponiamo che la curva L sia una curva canonica, cioè una curva di ordine $2\pi - 2$ dello spazio $S_{\pi-1}$. Sopra questa curva, la trasformazione τ è determinata da una omografia che sarà ancora detta τ. Alla serie canonica di L' corrisponde sopra L una serie che, aumentata di $p-1$ volte i punti uniti di γ_p, dà gruppi canonici di L. Ne concludiamo che la omografia τ possiede un asse σ_0, di dimensione $\pi' - 1$, che non incontra la curva L.

Nella serie canonica di L, abbiamo p serie parziali appartenenti alla involuzione γ_p [6], dunque la omografia τ possiede, oltre a σ_0, $p-1$ assi puntuali $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_{p-1}$. Gli iperpiani di $S_{\pi-1}$ contenenti $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_{p-1}$ contengono gli spazi a p dimensioni osculatori alla curva L nei punti uniti di γ_p.

Agli assi $\sigma_0, \sigma_1, \dots, \sigma_{p-1}$ possiamo associare rispettivamente i numeri $\varepsilon^0 = 1, \varepsilon, \dots, \varepsilon^{p-1}$, essendo ε una radice primitiva di ordine p della unità.

Consideriamo la varietà di Grassmann di S_r, dove $r = \frac{1}{2}\pi(\pi-1)$, rappresentante le rette di $S_{\pi-1}$. Alle corde di L corrispondono sopra questa varietà un modello proiettivo di F di cui le sezioni iperpiane sono le curve canoniche C. Sopra questa superficie F la trasformazione T è determinata da una omografia T che corrisponde a τ. Diciamo $\Sigma_0, \Sigma_1, \dots, \Sigma_{p-1}$ gli assi della omografia T e supponiamo che a questi assi siano rispettivamente associati i numeri $1, \varepsilon, \dots, \varepsilon^{p-1}$.

Nello spazio lineare $S_{\pi-1}$ di L, consideriamo uno spazio σ lineare a $\pi - 3$ dimensioni contenente gli spazi $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_{p-1}$. La rigata delle corde di L appoggiate sopra σ ha per immagine sopra F una curva C_0. D'altra parte al complesso lineare di asse σ corrisponde nello spazio S_r uno iperpiano passante per gli spazi $\Sigma_1, \Sigma_2, \dots, \Sigma_{p-1}$. Ne concludiamo che le curve canoniche di F trasformate delle curve canoniche di Φ, sono tagliate sopra F dagli iperpiani contenenti gli assi $\Sigma_1, \Sigma_2, \dots, \Sigma_{p-1}$. Diremo C^* queste curve. Il genere geometrico $\overline{p_g}$ di Φ è dunque eguale alla dimensione dello spazio Σ_0 aumentate di uno.

Lo spazio Σ_0 contiene le immagini delle rette congiungenti due punti di σ_0, oppure un punto di σ_1 con un punto di σ_{p-1}, ..., oppure un punto di σ_γ con un punto di $\sigma_{\gamma+1}$. Diciamo $r_0 = \pi' - 1, r_1, r_2, \dots, r_{p-1}$ le dimensioni degli spazi $\sigma_0, \sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_{p-1}$.

Abbiamo

$$\overline{p}_g = \frac{1}{2}\pi'(\pi'-1) + (r_1+1)(r_{p-1}+1) + (r_2+1)(r_{p-2}+1) + \ldots +$$
$$+ (r_\gamma + 1)(r_{\nu+1}+1) \ ,$$

cioè

$$\overline{p}_g = \pi - 1 - \frac{1}{2}(\pi'-1)(\pi'-2) + r_1 r_{p-1} + r_2 r_{p-2} + \ldots + r_\nu r_{\nu+1} + \nu \ .$$

6. - Per calcolare il genere aritmetico $\overline{p}_a$ di Φ bisognerebbe conoscere la relazione tra i generi aritmetici di una superficie e di una involuzione appartenenti a questa superficie. Questa relazione è stata stabilita solo in qualche caso particolare e nel caso generale, si incontrano non lievi difficoltà. Ma possiamo calcolare l'irregolarità di Φ.

Consideriamo sulla superficie Φ un sistema regolare $|\overline{G}|$ e diciamo $|G|$ il sistema corrispondente sulla superficie F. In generale, il sistema $|G|$ è più ampio che il sistema $|\overline{G}|$ ed è mutato in sè da T.

Una curva G rappresenta una corrispondenza (simmetrica) fra i punti della curva L. A questa corrispondenza corrisponde, sulla curva L', una corrispondenza fra i punti di questa curva. Questa corrispondenza è rappresentata sopra F' da una curva G'. Si vede così che al sistema $|\overline{G}|$ di Φ corrisponde un sistema $|G'|$ di F'.

Sulla superficie Φ, il sistema $|\overline{G}|$ appartiene ad un sistema continuo $\{\overline{G}\}$ di ∞^ϱ sistemi lineari, dove $\varrho \geq \pi'$. Sulla superficie F', il sistema $|G'|$ appartiene ad un sistema continuo $\{G'\}$ di $\infty^{\pi'}$ sistemi lineari. Al sistema $\{\overline{G}\}$ corrisponde il sistema $\{G'\}$ e si ha dunqne $\varrho = \pi'$.

La superficie Φ ha la stessa irregolarità π' che la superficie F'.

7. - Un caso semplice, dove si può calcolare $\overline{p}_g$ e $\overline{p}_a$ è quello dove l'involuzione γ_p e quindi l'involuzione I non hanno punti uniti. Si ha allora

$$p(\pi'-1) = \pi - 1 \ .$$

Abbiamo studiato questo caso alcuni anni or sono [7]. Si ha

$$\bar{p}_g = \frac{1}{2}(\pi' - 1)[p(\pi' - 1) + 1] ,$$

$$\bar{p}_a = \frac{1}{2}(\pi' - 1)[p(\pi' - 1) - 1] - 1 .$$

la irregolarità di Φ è eguale a quella π' di F'.

8. - Vogliamo studiare un altro esempio.

Consideriamo la curva piana L di ordine sei, trasformata in sè dall'omologia di periodo tre,

$$x_1' : x_2' : x_3' = x_1 : x_2 : \varepsilon x_3 , \tag{4}$$

dove ε è una radice primitiva cubica dell'unità.

L'equazione della curva L è

$$x_6^6 \varphi_0 + x_3^3 \varphi_3(x_1, x_2) + \varphi_6(x_1, x_2) = 0 ,$$

dove le φ sono forme algebriche in x_1, x_2 di grado indicato dall'indice.

Abbiamo $\pi = 10$, $\delta = 6$, $\pi' = 2$.

Per avere il modello canonico della curva L, rapportiamo proiettivamente le sue curve aggiunte, cioè le cubiche piane, agli iperpiani dello spazio S_9. Poniamo $X_{ijk} = x_1^i x_2^j x_3^k$ e diciamo O_{ijk} il punto di cui tutte le coordinate sono nulle salvo X_{ijk}.

Cerchiamo gli assi della omografia τ corrispondente alla omologia (1). Si vede che si ha:

uno spazio a quattro dimensioni $O_{003}O_{300}O_{210}O_{120}O_{030}$, corrispondente alla radice $\varepsilon^0 = 1$, (σ_4)

un piano $O_{201}O_{111}O_{021}$, corrispondente ad ε, (σ_2)

una retta $O_{102}O_{012}$, corrispondente ad ε^2 . (σ_1)

I sistemi di cubiche invarianti per la omologia (1) sono

$$x_3^3 \psi_0 + \psi_3(x_1, x_2) , \qquad x_3 \psi_2(x_1, x_2) = 0 , \qquad x_3^2 \psi_1(x_1, x_2) = 0 .$$

dove le ψ sono forme algebriche di grado eguale a l'indice.

I punti uniti della curva L sono sulla retta $x_3 = 0$, dunque la serie trasformata della serie canonica di L' è tagliata dalle cubiche del terzo sistema. Sulla curva canonica L di S_9, questa serie è tagliata dagli iperpiani passanti per gli assi σ_4 e σ_2.

Consideriamo adesso la superficie F tracciata sulla varietà di Grassmann di S_{44}. La trasformazione T è una omografia di cui gli assi sono:

Uno spazio Σ_0 di dimensione 15 contenente i punti rappresentanti le rette di S_9 congiungenti due punti di σ_4 oppure un punto di σ_1 con un punto di σ_2.

Uno spazio Σ_1 di dimensione 15 contenente i punti rappresentanti due punti l'uno di σ_4 e l'altro di σ_2, e la retta σ_1.

Uno spazio Σ_2 di dimensione 12 contenente i punti immagini delle rette del piano σ_2 e le rette congiungenti i punti di σ_4 coi punti di σ_1.

Possiamo dire che agli $\sigma_4, \sigma_2, \sigma_1$ sono associati i numeri $\varepsilon, \varepsilon^2, 1$. Allora, agli spazi $\Sigma_0, \Sigma_1, \Sigma_2$ sono associati i numeri $\varepsilon^2, 1, \varepsilon$. Ne risulta che le curve canoniche di F trasformate delle curve canoniche di Φ sono tagliate dagli iperpiani passanti per Σ_0 e Σ_2. Abbiamo dunque, per il genere geometrico di Φ, $\overline{p}_g = 16$.

Supponiamo che il punto $x_2 = x_3 = 0$ appartenga alla curva L. Questo punto sarà indicato di O' ed è un punto unito di $\gamma_p = \gamma_3$. Il punto corrispondente sulla curva L di S_9 è O_{300}. Dobbiamo avere $\varphi_6(x_1, x_2) \equiv x_2 \varphi_5(x_1, x_2)$.

La tangente alla curva L di S_9 nel punto O_{300} è comune agli iperpiani che corrispondono alle cubiche che toccano la curva L nel punto O'. Questi iperpiani passano per i punti O_{300}, O_{201}. Il secondo di questi punti appartiene allo spazio σ_2. Si vede dunque che i punti uniti di γ_3 sopra la curva canonica L appartengono allo spazio σ_4 e che le tangenti a L in questi punti si appoggiano sullo spazio σ_2. Quindi, i punti uniti $O_{12}, O_{13}, \ldots, O_{56}$ della involuzione I sono punti uniti di prima specie.

I punti uniti $O_1, O_2, \ldots, O_6$ sono di seconda specie e, per $p = 3$, non hanno influenza sul genere geometrico di Φ.

Fra il genere aritmetico di F e quello di Φ, abbiamo la relazione

$$12(p_a + 1) = 3.12(\overline{p}_a + 1) - 15.4 - 8.6 \ .$$

Abbiamo dunque $\overline{p}_a = 14$.

La irregolarità di Φ è dunque eguale a quella, due, della superficie F'.

BIBLIOGRAFIA

[1] *Construction de surfaces algébriques irrégulières* (« Bulletin de l'Acad. roy. de Belgique », 1950, pp. 14-22), *Involutions irrégulières appartenant à la surface des couples de points d'une courbe algébrique* (Idem, 1950, pp. 102-112), *Sur la structure des points unis d'une involution appartenant à la surface des couples de points d'une courbe algébrique* (Idem, 1950, pp. 383-387).

[2] Queste superficie sono state studiate da M. De Franchis, *Sulle varietà ∞^2 delle coppie di punti di due curve o di una curva algebrica* (« Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo », 1903, t. XVII), A. Maroni, *Sulle superficie algebriche possedenti due fasci di curve algebriche unisecantisi* (« Atti della Accademia di Torino », 1902-1903), F. Severi, *Sulle superficie che rappresentano le coppie di punti di una curva algebrica* (« Atti della Accademia di Torino », 1902-1903), *Sulle corrispondenze fra i punti di una curva algebrica e sopra certe classi di superficie* (« Memorie della Accademia di Torino », 1903).

[3] Vedere il nostro: *Mémoire sur les surfaces multiples* (« Mémoires in-8° de l'Académie roy. de Belgique », 1952).

[4] *Mémoire...*, loc. cit.

[5] *Mémoire...*, loc. cit.

[6] Vedere: P. Defrise, *Les courbes multiples abéliennes avec points de diramation* (« Bulletin des Sciences Mathématiques », 1938), ved. n. 5.

[7] *Sulla costruzione di certe superficie algebriche irregolari* (« Rendiconti Accademia dei Lincei », 1949, 1° sem.).