Extrait de « Mathesis », t. LXVIII, n^os 1-2-3, 1959.

SUR LA DÉGÉNÉRESCENCE D'UNE SEXTIQUE PLANE,

par Lucien Godeaux (Liège).

Nous démontrons le théorème suivant : *Une sextique plane possédant six tacnodes non situés sur une conique, dégénère en trois coniques deux à deux bitangentes.*

1. Soit C une sextique plane possédant six tacnodes $A_1, A_2, \dots, A_6$ non situés sur une conique et soient $a_1, a_2, \dots, a_6$ les tangentes tacnodales [1]. La courbe C est de genre — 2 et par suite dégénérée.

Rapportons projectivement les cubiques passant par $A_1, A_2, \dots, A_6$ aux plans de l'espace. Aux points du plan de C correspondent ceux d'une surface cubique F dépourvue de points doubles. Aux domaines des points $A_1, A_2, \dots, A_6$ correspondent respectivement six droites $a'_1, a'_2, \dots, a'_6$ deux à deux gauches et aux points infiniment voisins de $A_1, A_2, \dots, A_6$ situés sur $a_1, a_2, \dots, a_6$ correspondent des points $A'_1, A'_2, \dots, A'_6$ respectivement situés sur $a'_1, a'_2, \dots, a'_6$. A la courbe C correspond une courbe C′ d'ordre six, découpée sur F par une quadrique Q et ayant des points doubles en $A'_1, A'_2, \dots, A'_6$. Par conséquent, la quadrique Q touche la surface F en ces six points.

Projetons la courbe C′ du point A'_1 sur un plan σ. Nous obtenons ainsi une quartique plane C″ possédant cinq points doubles $A''_2, A'', \dots, A''_6$ projections des points $A'_2, A'_3, \dots, A'_6$ et par conséquent dégénérée.

Supposons en premier lieu que trois quelconques des points $A''_2, A''_3, \dots, A''_6$ ne soient pas en ligne droite. Alors, ces cinq points déterminent une conique γ rencontrant C″ en dix points et par conséquent faisant partie de cette courbe. Le restant de la courbe C″ est une conique γ'. Si celle-ci est irréductible, elle se confond avec la conique γ et C″ se réduit à la conique γ comptée deux fois. Si au contraire la conique γ' se réduit à deux droites, l'une au moins de celles-ci doit passer par trois des points $A''_2, A''_3, \dots A''_6$, ce qui implique une contradiction.

Si C″ se réduit à la conique γ comptée deux fois, la courbe C′ est tracée sur le cône projetant γ de A'_1 et la quadrique Q coïncide avec

---

[1] Un tacnode est parfois appelé point de rebroussement de seconde espèce. Il est caractérisé par le fait que la tangente de rebroussement rencontre la courbe en quatre points confondus au point de rebroussement. Un tacnode est un point double auquel est infiniment voisin un point double situé sur la tangente tacnodale.

ce cône. Chaque génératrice du cône Q rencontre C' en deux points en dehors de A'_1. Le cône Q touchant F aux points A'_2, A^{ε}_3, ..., A'_6, la conique γ touche en cinq points le contour apparent de la projection de F sur σ. Or ce contour est une quartique irréductible et nous arrivons à une absurdité.

On en conclut que trois au moins des points A''_2, A''_3, ..., A''_6 sont en ligne droite, par exemple les points A''_2, A''_3, A''_4. Cette droite fait partie de la courbe C'' et celle-ci est complétée par une cubique ayant deux points doubles A''_5, A''_6 et passant par les points A''_2, A''_3, A''_4. La droite $A''_5A''_6$ fait partie de cette cubique et passe par un des trois points précédents, par exemple par A''_2. La courbe C'' est donc formée des droites $A''_3A''_4$, $A''_5A''_6$ qui se coupent en A''_2 et d'une conique γ passant par A''_3, A''_4, A''_5, A''_6.

Retournons à la courbe C'. La droite $A''_3A''_4$ est la projection d'une conique γ_{56} tracée sur F et passant par les points A'_1, A'_2, A'_3, A'_4. La droite $A''_5A''_6$ est la projection d'une conique de F, γ_{34} passant par les points A'_1, A'_2, A'_5, A'_6. La conique γ est la projection d'une conique γ_{12} de F passant par les points A'_3, A'_4, A'_5, A'_6.

Enfin, en passant à la courbe C, on voit que celle-ci se compose de trois coniques : Une conique Γ_{12} passant par les points A_3, A_4, A_5, A_6 ; une conique Γ_{34} passant par les points A_1, A_2 et touchant Γ_{12} aux points A_5, A_6 ; enfin une conique Γ_{56} touchant Γ_{12} en A_3, A_4 et Γ_{34} en A_1, A_2. La courbe C est donc bien dégénérée en trois coniques se touchant deux à deux en deux points.

2. Nous allons former les équations des trois coniques Γ et, pour simplifier, nous désignerons par Γ_1, Γ_2, Γ_3 respectivement les coniques Γ_{12}, Γ_{34}, Γ_{56}. Nous prendrons comme triangle de référence celui qui est formé par les droites A_1A_2, A_3A_4, A_5A_6, ces droites ayant respectivement pour équations $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$.

Les coniques Γ_1, Γ_2, Γ_3 déterminent un réseau $|\Gamma|$. Dans le faisceau déterminé par les coniques Γ_2, Γ_3 se trouve la conique $x_1^2 = 0$, qui appartient donc au réseau $|\Gamma|$. Celui-ci comprend de même les coniques $x_2^2 = 0$, $x_3^2 = 0$. Il en résulte que le triangle de référence est autopolaire par rapport aux coniques Γ.

Pour obtenir les équations de ces coniques, posons

$$y_1 : y_2 : y_3 = x_1^2 : x_2^2 : x_3^2,$$

et interprétons les y comme coordonnées des points d'un plan σ'.

Aux coniques Γ_1, Γ_2, Γ_3 correspondent des droites formant un triangle inscrit dans le triangle de référence. Si nous désignons par $(0, a_2, a_3)$, $(b_1, 0, b_3)$, $(c_1, c_2, 0)$ les coordonnées des sommets de ce triangle, les coniques Γ_1, Γ_2, Γ_3 ont respectivement pour équations

$$-b_3c_2x_1^2+b_3c_1x_2^2+b_1c_2x_3^2=0,$$
$$c_2a_3x_1^2-c_1a_3x_2^2+c_1a_2x_3^2=0,$$
$$a_2b_3x_1^2+a_3b_1x_2^2-a_2b_1x_3^2=0.$$

Pour que les points A_1, A_2, ..., A_6 ne soient pas sur une même conique, les droites qui correspondent dans σ' aux coniques Γ_1, Γ_2, Γ_3, doivent former un triangle proprement dit, c'est-à-dire que l'on doit avoir

$$a_1b_3c_1+a_2b_1c_2\neq 0.$$

Un exemple de la courbe C est formé par une ellipse Γ_1 et par les cercles Γ_2, Γ_3 inscrits dans cette ellipse et ayant respectivement comme diamètre le grand et le petit axes de Γ_1. Ces deux cercles étant concentriques se touchent aux points cycliques.