" Dagli Atti del VI Congresso dell' Unione Matematica Italiana, Napoli 1959 „

SULLE SUPERFICIE ALGEBRICHE DI GENERE ZERO CON UN SISTEMA BICANONICO IRRIDUCIBILE

DI LUCIEN GODEAUX (A LIEGI)

Quando CASTELNUOVO, nel 1894, ha stabilito le condizione di razionalità delle superficie ($p_a = P_2 = 0$), egli ed ENRIQUES hanno costruito superficie di genere $p_a = p_g = 0$ e $P_2 > 0$. La superficie di CASTELNUOVO ha i caratteri $p_a = p_g = 0, P_2 = 2$ e le curve bicanoniche sono ellittiche. La superficie di ENRIQUES, cioè la superficie del sesto ordine passante due volte per i spigoli di un tetraedro, ha i caratteri $p_a = p_g = 0, P_2 = 1$; la curva bicanonica è di ordine zero.

Era così posto il problema di determinare tutte le superficie algebriche non razionali, di genere $p_a = p_g = 0$ (1).

F. ENRIQUES ha mostrato che la sua superficie era l'immagine di una involuzione del secondo ordine, senza punti uniti, appartenente ad una superficie di genere uno ($p_a = P_4 = 1$). Abbiamo dimostrato che se, sopra una superficie F' regolare, di genere p_a, abbiamo una involuzione ciclica di ordine $p_a + 1$, senza punti uniti, l'immagine di questa involuzione è una superficie F, non razionale, di genere $p_a = p_g = 0$. Un primo esempio è fornito della superficie F', del quinto ordine nello spazio ordinario, quando essa è trasformata in sè stessa da una omografia del quinto ordine. La superficie F ha allora i caratteri $p_a = p_g = 0, P_2 = 2$ e le curve bicanoniche hanno il genere quattro (1931). Un secondo esempio si ha quando il sistema canonico della superficie F' è un fascio di curve ellittiche; si ha allora per superficie F una superficie di genere $p_a = p_g = 0$, $P_2 = 1$, essendo la curva bicanonica composta da due curve ellittiche Γ_1, Γ_2, senza punto comune, tale che $3\,\Gamma_1 \equiv 3\,\Gamma_2$ (1934) (2).

Un terzo esempio si ha quando la superficie F' è l'intersezione di quattro iperquadriche di uno spazio S_6, di cui le curve canoniche sono le sezioni iperpiane. Si ha $p_a = 7$ e l'involuzione è di ordine otto. La superficie F ha i generi $p_a = p_g = 0$, $P_2 = 3$ (1949) (3).

Aggiungiamo che, nel 1931, il Prof. CAMPEDELLI ha costruito piani doppi con curva di diramazione del decimo ordine, di caratteri $p_a = p_g = 0$, $P_2 = 2$ o 3 (4).

Recentemente, abbiamo ripreso il problema nel caso di un sistema bicanonico irriducibile. Vogliamo dare qui un sunto dei risultati ottenuti (5).

Rammentiamo che abbiamo dimostrato (1934), coll'uso della formola di PICARD, che si ha $P_2 \leq 10$.

Essendo F una superficie algebrica di genere $p_a = p_g = 0, p^{(1)} = P_2 > 1$ (e $P_2 \leq 10$), diciamo $|C_2|, |C_3|, \ldots, |C_i|, \ldots$ i sistemi bicaconico, tricanonico, ..., i-canonico. Supponiamo $|C_2|$ irriducibile.

Nel caso $P_2 = 2$, abbiamo dimostrato che esiste almeno una curva sei-canonica la quale è da una parte formata da tre curve bicanoniche e d'altra parte, formata da due curve tricanoniche. Ne risulta che esistono sulla superficie F quattro curve $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3, \Gamma_4$, di genere due, secantesi due a due in punto. Le curve $\Gamma_1 + \Gamma_2$, $\Gamma_3 + \Gamma_4$ sono curve bicanoniche, le curve $2\Gamma_1 + \Gamma_3$, $2\Gamma_2 + \Gamma_4$, curve tricanoniche. Si vede allora che la superficie che abbiamo costruito nel 1931 è il caso generale delle superficie di genere $p_a = p_g = 0$, $P_2 = 2$ con sistema bicanonico irriducibile.

Abbiamo allora cercato di dimostrare che sopra una superficie F con $3 \leq P_2 \leq 10$, si trova almeno una curva sei-canonica formata da tre curve bicanoniche e di due curve tricanoniche. L'abbiamo fatto nei casi $P_2 = 3, 4$ o 5, ma in questi casi, si trova che la superficie F contiene una curva Γ (non canonica) tale che $2\,\Gamma$ sia una curva bicanonica, $\Gamma + \Gamma'$ curve tricanoniche e $2\,\Gamma'$ curve tetracanoniche.

Consideriamo adesso il caso generale. Abbiamo dimostrato che nel sistema pentacanonico, esistono curve che non sono formate da una curva tricanonica e di una curva bicanonica. Diciamo $\overline{C}_5$ queste curve. Esiste allora almeno una curva ottocanonica formata da una parte di due curve tetracanoniche e d'altra parte di una curva $\overline{C}_5$ e di una curva tricanonica. Ne deduciamo che esiste sulla F una curva Γ (non canonica) di genere $\pi = P_2$, tale che la curva $2\,\Gamma$ sia bicanonica, le curve $\Gamma + \Gamma'$ tricanoniche e le curve $2\,\Gamma'$ tetra-canoniche.

BIBLIOGRAFIA

(1) Per la bibliografia fino all'1934, vedere il mio opuscolo *Les surfaces algebriques non rationnelles de genres arithmétique et géométrique nuls* (Actualités Scient., N. 123. Paris, Hermann, 1934).

(2) *Sur une surface algébrique non rationelle de genres arithmétique et géométrique nuls, et de genre linéaire un* (Bull. Acad. roy de Belgique, 1934, pp. 184-187).

(3) *Sur la construction de surfaces non rationnelles de genres zéro* (Bull. Acad. r. de Belgique, 1949, pp. 688-693).

(4) Campedelli, *Sui piani doppi con curva di diramazione del decimo ordine* (Rend. Accad. Naz. dei Lincei, 1⁰ sem. 1932, pp. 358-362); *Sopra alcuni piani doppi notevoli con curva di diramazione del decimo ordine* (Idem., pp. 536-542).

(5) *Sur les surfaces de genres géométrique et arithmétique nuls possédant un faisceau de courbes bicanoniques irréductibles* (Bull. Acad. roy. de Belgique, 1958, pp. 738-749, 942-944); *Note sur les surfaces de genres zéro possédant un réseau irréductible de courbes bicanoniques* (Idem., 1959, pp. 52-68, 188-196); *Sur les surfaces de genres aritmétique et géométrique nuls dont le système bicanonique est irréductible* (Idem., sous presse).