

Note sur les involutions cycliques appartenant à une surface algébrique

Par LUCIEN GODEAUX, Liège

Nous nous proposons d'indiquer les résultats que nous avons obtenus dans l'étude des involutions cycliques n'ayant qu'un nombre fini de points unis appartenant à une surface algébrique et des surfaces images de ces involutions.

Considérons une surface algébrique F transformée en soi par une transformation birationnelle de période p premier, engendrant sur la surface une involution I n'ayant qu'un nombre fini de points unis. Nous désignerons par Φ une surface image de cette involution. On peut prendre pour Φ une surface normale sur laquelle les points de diramation (ou de ramification) sont isolés. Il s'agit de déterminer la structure des singularités de ces points de diramation pour la surface Φ . On y arrive en étudiant la structure des points unis de l'involution sur F .

On peut prendre, pour modèle projectif de la surface F une surface normale, appartenant à un espace linéaire de dimension aussi grande qu'on le veut, sur laquelle l'involution I est engendrée par une homographie H de période p , possédant p axes ponctuels $\sigma_0, \sigma_1, \dots, \sigma_{p-1}$, les points unis de l'involution appartenant tous à l'espace σ_0 . Si nous désignons par ε une racine primitive d'ordre p de l'unité, on peut attacher aux espaces $\sigma_0, \sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_{p-1}$ les nombres $\varepsilon^0 = 1, \varepsilon, \varepsilon^2, \dots, \varepsilon^{p-1}$.

Dans le système des sections hyperplanes $|C|$ de F , il existe p systèmes linéaires partiels $|C_0|, |C_1|, \dots, |C_{p-1}|$ appartenant à l'involution I , le système $|C_i|$ étant découpé par les hyperplans passant par $\sigma_0, \sigma_1, \dots, \sigma_{i-1}, \sigma_{i+1}, \dots, \sigma_{p-1}$. Le système $|C_0|$ est par conséquent dépourvu de points-base et les autres systèmes ont comme points-base les points unis de l'involution.

Rapportons projectivement les courbes C_0 aux hyperplans d'un espace linéaire ayant même dimension que ce système. Il correspond à la surface F une surface normale Φ , image de l'involution, chaque groupe de celle-ci étant représenté par un point de Φ . Sur Φ , les points de diramation sont isolés.

Considérons un point uni A de I . Ce point appartient à σ_0 et nous supposons que le plan tangent ξ en A à F ne rencontre σ_0 qu'au seul point A . Le plan ξ est transformé en soi par H et s'appuie par conséquent soit suivant une droite sur l'un des espaces $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_{p-1}$, soit suivant un point sur deux de ces espaces. Dans le premier cas, nous dirons que A est un point uni de première espèce, dans le second qu'il est uni de seconde espèce.

On démontre assez facilement que si A est un point uni de première espèce, le point de diramation correspondant sur Φ est multiple d'ordre p pour cette surface, le cône tangent étant rationnel et irréductible.

Si A est un point uni de seconde espèce, on peut toujours supposer, quitte à changer éventuellement de notations, que le plan tangent ξ s'appuie en un point A_1 sur σ_1 . Nous supposons qu'il s'appuie en un second point A_α sur σ_α ($\alpha > 1$).

Si nous rapportons le plan ξ au triangle AA_1A_α , nous voyons que dans ce plan H détermine l'homographie

$$x' : x'_1 : x'_\alpha = x : \varepsilon x_1 : \varepsilon^\alpha x_\alpha.$$

Les courbes C_1 sont découpées sur F par les hyperplans passant par les espaces $\sigma_0, \sigma_2, \dots, \sigma_{p-1}$; elles ont donc un point simple en A et y touchent la droite AA_α . De même, les courbes C_α ont un point simple en A et y touchent la droite AA_1 .

Désignons par C'_0 les courbes C_0 passant par A . Elles acquièrent en ce point une certaine multiplicité $\lambda_1 + \mu_1 < p$, λ_1 tangentes étant confondues avec AA_1 , μ_1 avec AA_α . Désignons par C''_0 les courbes C'_0 assujetties à toucher en A une droite distincte de AA_1, AA_α ; elles acquièrent en A une multiplicité $\lambda_2 + \mu_2 > \lambda_1 + \mu_1$, λ_2 tangentes étant confondues avec AA_1 , μ_2 avec AA_α . Et ainsi de suite. On arrivera finalement à un système linéaire $|C_0^{(\nu+1)}|$ dont les courbes ont en A la multiplicité p avec p tangentes variables ($p = 2\nu + 1$).

On a d'ailleurs

$$\lambda_i + \alpha \mu_i \equiv 0, \pmod{p}.$$

Il existe un et un seul entier β , compris entre 1 et p , tel que

$$\alpha \beta - 1 \equiv 0, \pmod{p}.$$

Les courbes C_1 rencontrent les courbes C'_0 nécessairement en p points confondus en A , puisque $|C_1|$ et $|C'_0|$ appartiennent à l'involution (on démontre que ce nombre ne peut être un multiple de p supérieur à p). Il existe donc un certain nombre de points fixes, infiniment voisins successifs de A , communs à ces courbes, le premier de ces points étant sur AA_α . Nous désignerons ces points par $(\alpha, 1), (\alpha, 2), \dots; (\alpha, k_\alpha)$. Les points infiniment voisins de (α, k_α) appartenant aux courbes C_1, C'_0 sont généralement distincts. Nous dirons que le point (α, k_α) est uni de première espèce pour l'involution.

De même, il existe un certain nombre de points fixes $(1, 1), (1, 2), \dots; (1, k_1)$ infiniment voisins successifs de A , communs aux courbes C'_0, C_α . Le dernier de ces points est uni de première espèce pour l'involution.

Parmi les solutions des congruences

$$\lambda + \alpha \mu \equiv 0, \mu + \beta \lambda \equiv 0, \pmod{p},$$

se trouve la solution $\mu = 1, \lambda = p - \alpha$. Les courbes C_0^* correspondantes doivent

avoir p points d'intersection avec les courbes C_α confondus en A ; elles passent donc simplement par les points $(\alpha, 1), (\alpha, 2), \dots; (\alpha, k_\alpha)$ et on a

$$p - \alpha + 1 + k_\alpha = p,$$

d'où $k_\alpha = \alpha - 1$. On a de même $k_1 = \beta - 1$.

Posons

$$\lambda_1 + \alpha \mu_1 = h_\alpha p, \quad \mu_1 + \beta \lambda_1 = h_\beta p.$$

Nous classerons les points unis de seconde espèce en trois catégories:

- 1°. Les deux nombres h_α, h_β sont tous deux égaux à l'unité.
- 2°. L'un des nombres h_α, h_β est égal à l'unité, l'autre est supérieur à l'unité.
- 3°. Les deux nombres h_α, h_β sont tous deux supérieurs à l'unité.

Posons encore

$$p = a\alpha + b, \quad b < \alpha.$$

Pour que nous puissions avoir

$$\lambda_1 + \alpha \mu_1 = h_\alpha p, \quad h_\alpha > 1,$$

il faut qu'il existe un nombre r tel que

$$(r-1)b < a < rb,$$

$$(r-1)(a+b) < \alpha - 1.$$

Si m est le plus grand entier tel que

$$m\alpha < [m(r-1) + 1]b,$$

on a

$$\lambda_1 = m[(r-1)b - \alpha] + b, \quad \mu_1 = m[(r-1)a + 1] + a.$$

Plus généralement, les nombres

$$\lambda'_{i+1} = (m-i)[(r-1)b - \alpha] + b, \quad \mu'_{i+1} = (m-i)[(r-1)a + 1] + a, \\ (i = 0, 1, 2, \dots; m),$$

satisfont aux congruences

$$\lambda + \alpha \mu \equiv 0, \quad \mu + \beta \lambda \equiv 0, \quad (\text{mod. } p).$$

Envisageons les courbes C'_0 . Sur chacune de ces courbes, le point A est l'origine d'un certain nombre de branches linéaires passant par les points $(\alpha, 1), (\alpha, 2), \dots, (\alpha, \alpha-1)$ et d'un certain nombre de branches superlinéaires passant par le point $(\alpha, 1)$. Chacune de ces branches passe par un nombre fini de points fixes infiniment voisins successifs d'un point de la suite $(\alpha, 1), \dots, (\alpha, \alpha-2)$ et le dernier de ces points est uni de première espèce pour l'involution. Nous désignerons ces derniers points par $P_1, P_2, \dots, P_k$.

Désignons par $\overline{C}_0^{(i)}$ les courbes du système $|C_0|$ ayant la multiplicité $\lambda'_i + \mu'_i$ en A . Les courbes $\overline{C}_0^{(m+1)}$ ne passent pas par les points $P_1, \dots, P_k$; elles ont la multiplicité α aux points $(\alpha, 1), (\alpha, 2), \dots, (\alpha, \alpha - 1)$.

Les courbes $\overline{C}_0^{(m)}$ passent à fois par le point $(\alpha, \alpha - 1)$ et ne peuvent passer que par l'un des points $P_1, \dots, P_k$, par exemple par P_1 .

Les courbes $\overline{C}_0^{(m-1)}$ passent à fois par le point $(\alpha, \alpha - 1)$ et deux fois par le point P_1 , mais ne peuvent passer par les points $P_2, \dots, P_k$.

De proche en proche, on voit que les courbes $\overline{C}_0^{(m-2)}, \dots, \overline{C}_0'', C_0'$ passent à fois par le point $(\alpha, \alpha - 1)$ et trois fois, $\dots$, $m - 1$ fois, m fois par le point P_1 , mais ne peuvent passer par les points $P_2, \dots, P_k$. On a donc $k = 1$.

On peut faire un raisonnement analogue pour les branches des courbes C_0' d'origine A passant par le point $(1, 1)$ lorsque $h_\beta > 1$.

Convenons de ranger les points de diramation en trois catégories comme les points unis qu'ils représentent. Si l'on pose

$$p = b'\beta + a', \quad a' < \beta,$$

on obtient les énoncés suivants:

En un point de diramation de première catégorie, la surface Φ possède la multiplicité $a + b'$, le cône tangent se scindant en deux cônes rationnels d'ordres a, b' se coupant suivant une seule droite.

En un point de diramation de seconde catégorie, la surface Φ possède la multiplicité $a + m + b'$, le cône tangent se scindant en trois cônes rationnels d'ordres a, m, b' , le cône d'ordre m coupant chacun des deux autres cônes suivant une droite et ces deux derniers cônes n'ayant en commun que leur sommet.

Définissons un nombre n en partant de a', b' comme nous avons défini m en partant de a, b . Nous avons l'énoncé:

En un point de diramation de troisième catégorie, la surface Φ possède la multiplicité $a + m + n + b'$, le cône tangent se scindant en quatre cônes d'ordres a, m, n, b' . Les cônes d'ordres a, m se rencontrent suivant une droite, ceux d'ordre m, n suivant une droite, ceux d'ordre n, b' suivant une droite; en dehors de ces droites, les cônes n'ont en commun que leur sommet.

Bibliographie

- L. GODEAUX, Les involutions cycliques appartenant à une surface algébrique. Actualités scientifiques, No. 270, Paris, 1935.
- L. GODEAUX, Mémoire sur les surfaces multiples. Mémoires in-8° de l'Académie royale de Belgique, 1952.
- L. GODEAUX, Les singularités des points de diramation isolés des surfaces multiples. Deuxième Colloque de Géométrie algébrique du Centre belge de Recherches Mathématiques, Liège, 1952.

Eingegangen am 28. 10. 1953