80e CONGRÈS

DES

SOCIÉTÉS SAVANTES DE PARIS

ET DES DÉPARTEMENTS

A LILLE

SECTION DES SCIENCES

SUR UNE GÉOMÉTRIE DE L'ESPACE A SIX DIMENSIONS ET SUR UN PRINCIPE DE TÉTRALITÉ;

Par M. Lucien Godeaux

(Liége).

L'idée première de ce travail nous est venue à la lecture d'un Mémoire d'Élie Cartan [1] où le regretté géomètre introduisait un principe de « trialité ». Nous nous étions proposé d'introduire la géométrie considérée par Cartan d'une manière élémentaire, en partant d'un espace projectif. Nous sommes parvenu à une géométrie différente, dans un espace à six dimensions, où il existe quatre familles d'éléments dépendant de six paramètres : les points, les hyperplans et deux familles d'espaces à trois dimensions. On peut passer d'une famille à l'autre par des transformations linéaires et par suite on obtient un « principe de tétralité ».

1. Commençons par rappeler quelques propriétés bien connues, qui nous seront utiles dans la suite.

Soient $y\,(y_1, y_2, y_3, y_4)$ et $z\,(z_1, z_2, z_3, z_4)$ deux points d'un espace S_3 à trois dimensions. Posons

$$p_{ik} = y_i z_k - y_k z_i;$$

(1) *Le principe de dualité et la théorie des groupes simples et semi-simples* (*Bull. Sc. math.*, 1925, p. 361-374).

nous avons

$$p_{ii} = 0, \qquad p_{ik} + p_{ki} = 0.$$

A la droite yz, nous associons les coordonnées homogènes p_{12}, p_{13}, p_{14}, p_{23}, p_{42}, p_{34}, liées d'ailleurs par la relation

$$p_{12}p_{34} + p_{13}p_{42} + p_{14}p_{23} = 0. \tag{1}$$

Interprétons p_{12}, p_{13}, ..., p_{34} comme coordonnées projectives homogènes des points d'un espace linéaire S_5 à cinq dimensions. L'équation (1) représente une hyperquadrique Q et il y a une correspondance biunivoque, sans exception, entre les droites de S_3 et les points de Q.

On peut aussi considérer une droite comme l'intersection de deux plans $\eta(\eta_1, \eta_2, \eta_3, \eta_4)$ et $\zeta(\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3, \zeta_4)$, en posant

$$q_{ik} = \eta_i\zeta_k - \eta_k\zeta_i.$$

Les coordonnées tangentielles q_{12}, q_{13}, q_{14}, q_{23}, q_{42}, q_{34} de la droite sont également liées par la relation (1) et l'on a

$$\frac{q_{12}}{p_{34}} = \frac{q_{13}}{p_{42}} = \frac{q_{14}}{p_{23}} = \frac{q_{23}}{p_{14}} = \frac{q_{42}}{p_{12}} = \frac{q_{34}}{p_{12}}. \tag{2}$$

Aux droites de S_3 passant par un point correspondent sur Q les points d'un plan σ et l'on a, sur cette hyperquadrique, une famille (σ) de ∞^3 plans σ. Deux plans σ se rencontrent en un point.

Aux droites d'un plan de S_3 correspondent sur Q les points d'un plan σ' et l'on a, sur Q, une famille (σ') de ∞^3 plans σ'. Deux plans σ' se rencontrent en un point.

Un plan σ et un plan σ' ne se rencontrent pas en général, mais s'ils se rencontrent, c'est nécessairement suivant une droite.

2. Considérons un espace S_6 à six dimensions et, dans cet espace, un espace S_5 dans lequel nous fixons une hyperquadrique Q. Nous allons considérer la géométrie de S_6 ayant comme groupe fondamental le groupe des homographies pour lesquelles l'hyperquadrique Q est invariante.

Soit H une de ces homographies. Elle admet S_5 comme hyperplan uni et détermine dans cet espace une homographie H_1 qui conserve Q. A H_1 correspond donc dans S_3 une transformation biunivoque entre les droites et cette transformation échange entre eux les complexes linéaires de droites. Il en résulte que cette transformation est une homographie ou une réciprocité de S_3.

Considérons une homographie de S_3, soit

$$\rho x'_i = a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + a_{i3}x_3 + a_{i4}x_4 \qquad (i = 1, 2, 3, 4),$$

et posons

$$A_{ik}^{lm} = \begin{vmatrix} a_{il} & a_{kl} \\ a_{im} & a_{km} \end{vmatrix}.$$

Entre les droites de S_3, cette homographie donne la transformation

$$(3) \qquad \rho' p'_{ik} = A_{ik}^{12} p_{12} + A_{ik}^{13} p_{13} + A_{ik}^{14} p_{14} + A_{ik}^{23} p_{23} + A_{ik}^{42} p_{42} + A_{ik}^{34} p_{34},$$

c'est-à-dire une homographie H_1 conservant Q.

Dans l'espace S_6, nous pouvons prendre comme coordonnées cartésiennes non homogènes $p_{12}, p_{13}, \ldots, p_{34}$ et l'homographie H donnant naissance à H_1 aura pour équations

$$(4) \qquad p'_{ik} = A_{ik} + A_{ik}^{12} p_{12} + \ldots + A_{ik}^{34} p_{34},$$

les A_{ik} étant des constantes.

Partons au contraire d'une réciprocité de S_3,

$$\rho \xi'_i = a_{i1} x_1 + a_{i2} x_2 + a_{i3} x_3 + a_{i4} x_4 \qquad (i = 1, 2, 3, 4).$$

Dans S_5, il lui correspond une homographie H'_1 dont les équations peuvent se déduire des équations (3) en remplaçant $p'_{12}, \ldots, p'_{34}$ respectivement par $q'_{12}, \ldots, q'_{34}$. Ensuite, nous devrons remplacer $q'_{12}, \ldots, q'_{34}$ respectivement par $p'_{34}, \ldots, p'_{12}$, c'est-à-dire opérer l'homographie H_0 représentée par les équations (2). Il en résulte que l'on obtiendra les homographies H' de S_6, provenant des réciprocités de S_3, en effectuant les produits H_0H.

Par conséquent, le groupe fondamental de la Géométrie que nous voulons considérer dans S_6 sera obtenu en considérant les homographies H représentées par les équations (4) et l'homographie H_0 (qui peut être considérée comme une homographie singulière de S_6).

Observons que les homographies H échangent entre eux les plans de (σ) d'une part et les plans de (σ') d'autre part. Au contraire, les homographies H' changent un plan σ en un plan σ'.

3. Les espaces à trois dimensions de S_6 sont en nombre ∞^{12} et passer par un point pour un de ces espaces équivaut à trois conditions. Par conséquent, les espaces à trois dimensions de S_6 passant par un plan sont en nombre ∞^3.

Désignons par Σ les espaces à trois dimensions de S_6 qui passent par un plan σ de Q. Comme il y a ∞^3 plans σ et ∞^3 espaces Σ passant par un plan σ, les espaces Σ forment un système (Σ) de dimension 6. Observons d'ailleurs qu'un espace Σ ne peut contenir deux plans σ.

Désignons de même par Σ' un espace à trois dimensions de S_6 passant par un plan σ' de Q. Les espaces Σ' forment un système (Σ') à six dimensions.

Nous obtenons ainsi, dans S_6, deux systèmes (Σ), (Σ') d'espaces à trois dimensions qui ont la même dimension, 6, que l'espace ponctuel et l'espace tangentiel S_6. Nous allons montrer que l'on peut établir une correspondance biunivoque, analogue à une projectivité, entre les systèmes (Σ), (Σ') et les espaces ponctuel et tangentiel S_6. Il suffira évidemment de le faire dans un seul cas; nous considérerons précisément le système (Σ) et l'espace ponctuel S_6.

4. Aux droites de S_3 passant par un point y correspondent sur Q les points d'un plan σ commun aux hyperplans (de S_5)

$$\begin{aligned}
\varphi_1 &\equiv y_1 p_{23} - y_2 p_{13} + y_3 p_{12} = 0, \\
\varphi_2 &\equiv y_1 p_{42} + y_2 p_{14} - y_4 p_{12} = 0, \\
\varphi_3 &\equiv y_1 p_{34} - y_3 p_{14} + y_4 p_{13} = 0; \\
& y_2 p_{34} + y_3 p_{42} + y_4 p_{23} = 0,
\end{aligned}$$

l'une de ces équations étant une conséquence des trois autres à cause de la condition (1). Nous prendrons, pour représenter σ, les trois premières équations.

Cela étant, un espace Σ passant par σ sera représenté par les équations

$$\lambda_1 - \lambda_0 \varphi_1 = 0, \qquad \lambda_2 - \lambda_0 \varphi_2 = 0, \qquad \lambda_3 - \lambda_0 \varphi_3 = 0,$$

c'est-à-dire par

$$\frac{1}{\lambda_0} = \frac{\varphi_1}{\lambda_1} = \frac{\varphi_2}{\lambda_2} = \frac{\varphi_3}{\lambda_3}.$$

On peut disposer du facteur de proportionnalité des λ pour poser $\lambda_0 = y_4$, de sorte qu'un espace Σ sera déterminé par les quantités (homogènes)

$$y_1, \quad y_2, \quad y_3, \quad y_4, \quad \lambda_1, \quad \lambda_2, \quad \lambda_3,$$

qui seront les coordonnées de cet espace.

5. Ceci établi, considérons une relation linéaire F = 0, linéaire et non homogène par rapport à $p_{12}, p_{13}, \ldots, p_{34}$, linéaire et homogène par rapport à $y_1, y_2, y_3, y_4, \lambda_1, \lambda_3, \lambda_3$.

A un espace Σ, F = 0 fait correspondre les points d'un hyperplan de S_6; à un point de S_6, F = 0 fait correspondre une variété d'espaces Σ telle que par un plan σ passent ∞^2 espaces Σ. Il en résulte qu'à une propriété (projective) ponctuelle de l'espace S_6 correspond une propriété (projective) d'espaces du système (Σ).

Notons que l'on pourrait, en désignant par $\pi_0, \pi_{12}, \ldots, \pi_{34}$ les coordonnées homogènes d'un hyperplan de S_6 l'équation de celui-ci étant

$$\pi_0 + \pi_{12} p_{12} + \ldots + \pi_{34} p_{34} = 0,$$

considérer une relation F' = 0 linéaire et homogène d'une part en $\pi_0, \pi_{12}, \ldots, \pi_{34}$, d'autre part en $y_1, \ldots, y_4, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$. Alors, à un espace Σ correspond un point de S_6 et à un point de S_6, un espace Σ.

On peut établir des résultats analogues pour (Σ') et les espaces ponctuel et tangentiel S_0. On obtient ainsi un

Principe de tétralité. — *D'une propriété (projective) de l'un des espaces ponctuel ou tangentiel* S_6, *ou de l'un des systèmes* (Σ), (Σ'), *on peut déduire une propriété (projective) de chacune des autres variétés.*