Remarque sur la surface de Kummer

par Lucien GODEAUX
Membre de la Société

RÉSUMÉ. — On établit que si l'on remplace dans l'équation d'une quadrique inscrite dans le tétraèdre de référence, les coordonnées courantes par leurs carrés, on obtient l'équation d'une surface de Kummer.

En remplaçant dans l'équation d'une quadrique tangente aux arêtes du tétraèdre de référence les coordonnées courantes par leurs puissances d'un certain ordre, nous avons obtenu une généralisation des surfaces desmiques, généralisation qui présente un certain intérêt parce que, à partir d'un certain ordre, ces surfaces sont irrégulières (1). Dans cette note, nous partons au contraire de l'équation d'une quadrique tangente aux faces du tétraèdre de référence; nous montrons qu'en remplaçant les coordonnées courantes par leurs carrés, on obtient une surface de Kummer (2).

On pourrait également remplacer les coordonnées courantes par leurs puissances d'ordre n; cela conduirait à des surfaces d'ordre en possédant, dans chacune des faces du tétraèdre de référence, n^2 points doubles. Il ne semble pas à première vue que ces surfaces présentent un grand intérêt.

1. Rappelons tout d'abord quelques propriétés d'une qua-

---

(1) *Une généralisation des surfaces desmiques* (Bulletin de l'Académie roy. de Belgique, 1952, pp. 892-897); *Sur un faisceau de surfaces algébriques irrégulières* (Bulletin de la Société roy. des Sciences de Liège, 1952, pp. 314-319); *Sur un faisceau de surfaces desmiques généralisées.* (Bulletin de l'Académie roy. de Belgique, 1953, pp. 230-242).

(2) C'est la surface appelée *tétraédroïde* par Cayley.

drique inscrite dans le tétraèdre de référence. L'équation tangentielle d'une telle quadrique s'écrit

$$a_{12}\xi_1\xi_2 + a_{13}\xi_1\xi_3 + a_{14}\xi_1\xi_4 + a_{23}\xi_2\xi_3 + a_{24}\xi_2\xi_4 + a_{34}\xi_3\xi_4=0$$

et son équation ponctuelle

$$\begin{vmatrix} 0 & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ x_1 & 0 & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ x_2 & a_{12} & 0 & a_{23} & a_{24} \\ x_3 & a_{13} & a_{23} & 0 & a_{34} \\ x_4 & a_{14} & a_{24} & a_{34} & 0 \end{vmatrix} = 0. \tag{1}$$

Le point de contact P_1 de la quadrique avec le plan $x_1 = 0$ a pour équation tangentielle

$$a_{12}\xi_2 + a_{13}\xi_3 + a_{14}\xi_4 = 0$$

et par conséquent pour coordonnées

$$P_1 \ (0,\ a_{12},\ a_{13},\ a_{14}).$$

Nous supposerons le déterminant

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{12} & 0 & a_{23} & a_{24} \\ a_{13} & a_{23} & 0 & a_{34} \\ a_{14} & a_{24} & a_{34} & 0 \end{vmatrix}$$

différent de zéro et nous désignerons par Δ_{ik} ses mineurs algébriques.

Le plan $x_1 = 0$ coupe la quadrique suivant deux droites représentées par l'équation

$$(x_2\,\Delta_{12} + x_3\,\Delta_{13} + x_4\,\Delta_{14})^2 - \Delta \begin{vmatrix} 0 & x_2 & x_3 & x_4 \\ x_2 & 0 & a_{23} & a_{24} \\ x_3 & a_{23} & 0 & a_{34} \\ x_4 & a_{24} & a_{34} & 0 \end{vmatrix} = 0. \tag{2}$$

2. Cela étant, considérons la surface F, du quatrième ordre, représenté par l'équation

$$\begin{vmatrix} 0 & x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 & x_4^2 \\ x_1^2 & 0 & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ x_2^2 & a_{12} & 0 & a_{23} & a_{24} \\ x_3^2 & a_{13} & a_{23} & 0 & a_{34} \\ x_4^2 & a_{14} & a_{24} & a_{34} & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Nous allons montrer que c'est une surface de Kummer.

La surface F est la transformée de la quadrique (1) par l'opération

$$x_1 : x_2 : x_3 : x_4 = x'^2_1 : x'^2_2 : x'^2_3 : x'^2_4.$$

L'intersection de la surface F avec le plan $x_1 = 0$ se compose de deux coniques, transformées des droites (2). Ces deux coniques ont en commun quatre points

$$P_{11}\,(0,\ \sqrt{a_{12}},\ \sqrt{a_{13}},\ \sqrt{a_{14}},),\ P_{12}(0,\ -\sqrt{a_{12}},\ \sqrt{a_{13}},\ \sqrt{a_{14}}),$$

$$P_{13}\,(0,\ \sqrt{a_{12}},-\sqrt{a_{13}},\ \sqrt{a_{14}},),\ P_{14}(0,\ \sqrt{a_{12}},\ \sqrt{a_{13}},-\sqrt{a_{14}}).$$

Observons que ces points sont les sommets d'un quadrangle complet dont le triangle diagonal est le triangle de référence $O_2O_3O_4$ du plan $x_1 = 0$.

On vérifié aisément que chacun de ces points est double pour la surface F et précisément double conique. Le cône tangent à la surface au point P_{11} par exemple, a pour équation

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & \sqrt{a_{12}}\,x_2 & \sqrt{a_{13}}\,x_3 & \sqrt{a_{14}}\,x_4 \\ 0 & 0 & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ \sqrt{a_{12}}\,x_2 & a_{12} & 0 & a_{23} & a_{24} \\ \sqrt{a_{13}}\,x_3 & a_{13} & a_{23} & 0 & a_{34} \\ \sqrt{a_{14}}\,x_4 & a_{14} & a_{24} & a_{34} & 0 \end{vmatrix} - \Delta x_1^2 = 0.$$

Ainsi donc : *la surface F possède seize points doubles coniques situés quatre par quatre dans les faces du tétraèdre de référence.*

3. Désignons par F le premier membre de l'équation de la surface F et par Φ le déterminant qui figure au premier membre de l'équation précédente.

Le cône lieu des droites passant par P_{11} et touchant F en dehors de ce point a pour équation

$$\begin{vmatrix} 0 & x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 & x_4^2 \\ 0 & 0 & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ \sqrt{a_{12}}\, x_2 & a_{12} & 0 & a_{23} & a_{24} \\ \sqrt{a_{13}}\, x_3 & a_{13} & a_{23} & 0 & a_{34} \\ \sqrt{a_{14}}\, x_4 & a_{14} & a_{24} & a_{34} & 0 \end{vmatrix}^2 - \mathrm{F}\,\Phi = 0, \quad (3)$$

Ce cône a comme droites doubles les droites projetant de P_{11} les quinze autres points doubles de la surface F_1 il doit donc se décomposer en six plans passant chacun par six points doubles de la surface, dont le point P_{11}. Nous formerons directement les équations de ces plans.

Pour former l'équation d'un de ces plans, il suffit de remarquer qu'il y a, dans les plans $x_1 = 0$, $x_3 = 0$, $x_4 = 0$, chaque fois une droite passant par deux points doubles de la surface et par le point O_2. On trouve ainsi les plans

$$\sqrt{a_{34}}\, x_1 + \sqrt{a_{14}}\, x_3 - \sqrt{a_{13}}\, x_4 = 0$$

qui passe par les points doubles P_{11}, P_{12},

$$P_{31}(\sqrt{a_{13}}, \sqrt{a_{23}}, 0, \sqrt{a_{34}}),\ P_{33}(\sqrt{a_{13}}, -\sqrt{a_{23}}, 0, \sqrt{a_{34}}),$$
$$P_{42}(-\sqrt{a_{14}}, \sqrt{a_{24}}, \sqrt{a_{34}}, 0),\ P_{44}(\sqrt{a_{14}}, \sqrt{a_{24}}, -\sqrt{a_{34}}, 0)$$

et

$$\sqrt{a_{34}}\, x_1 - \sqrt{a_{14}}\, x_3 + \sqrt{a_{13}}\, x_4 = 0,$$

qui passe par les points P_{11}, P_{12},

$$P_{32}(-\sqrt{a_{13}}, \sqrt{a_{23}}, 0, \sqrt{a_{34}}),\ P_{34}(\sqrt{a_{13}}, \sqrt{a_{23}}, 0, -\sqrt{a_{34}}),$$
$$P_{41}(\sqrt{a_{14}}, \sqrt{a_{24}}, \sqrt{a_{34}}, 0)\ P_{43}(\sqrt{a_{14}}, -\sqrt{a_{24}}, \sqrt{a_{34}}, 0).$$

On trouve de même les plans

$$\sqrt{a_{24}}\, x_1 + \sqrt{a_{14}}\, x_2 - \sqrt{a_{12}}\, x_4 = 0,$$

qui passe par les points P_{11}, P_{13}, P_{42}, P_{43},

$$P_{21}(\sqrt{a_{12}},\, 0,\, \sqrt{a_{23}},\, \sqrt{a_{24}}),\ P_{23}(\sqrt{a_{12}},\, 0,\, -\sqrt{a_{23}},\, \sqrt{a_{24}}),$$

$$\sqrt{a_{24}}\, x_1 - \sqrt{a_{14}}\, x_2 + \sqrt{a_{12}}\, x_4 = 0,$$

qui passe par les points P_{11}, P_{13}, P_{41}, P_{44},

$$P_{22}(-\sqrt{a_{12}},\, 0,\, \sqrt{a_{23}},\, \sqrt{a_{24}}),\ P_{24}(\sqrt{a_{12}},\, 0,\, \sqrt{a_{23}},\, \sqrt{a_{24}}),$$

$$\sqrt{a_{23}}\, x_1 + \sqrt{a_{13}}\, x_2 - \sqrt{a_{12}}\, x_3 = 0,$$

qui passe par les points P_{11}, P_{13}, P_{21}, P_{24}, P_{32}, P_{33} et

$$\sqrt{a_{23}}\, x_1 - \sqrt{a_{13}}\, x_2 + \sqrt{a_{12}}\, x_3 = 0,$$

passant par les points P_{11}, P_{14}, P_{22}, P_{23}, P_{31}, P_{34}.

L'identification du premier membre de l'équation (3) et du produit des premiers membres des équations des six plans dont il vient d'être question est assez longue et nous ne la reproduirons pas.

4. Il reste à prouver que l'un quelconque des plans dont il vient d'être question, ou l'un quelconque des plans analogues que l'on peut obtenir par le même raisonnement, touche la surface F le long d'une conique. Nous l'établirons par un raisonnement géométrique simple.

Désignons par α un de ces plans. La première polaire d'un point R extérieur à α par rapport à F est une surface cubique qui passe par les six points doubles de la section (F, α) de F par α. Elle ne rencontre donc plus cette courbe en dehors de ces points.

Supposons qu'en un point M de la courbe (F, α), distinct des points doubles, le plan tangent μ à F soit distinct de α. Si R est un point de μ, la surface cubique polaire de R passe par M et contient une partie au moins de la courbe (F, α). En faisant varier M sur (F, α), on voit qu'une partie de cette courbe appartiendrait à toutes les surfaces polaires et serait par conséquent double pour la surface F. Cette partie double devrait passer par un point double au moins de F dans le plan α, mais alors ce point serait biplanaire. Or, les 16 points doubles de F sont coniques, donc la courbe (F, α) ne peut contenir une partie double pour F. On en conclut que le plan tangent à F en M coïncide avec le plan α.

Le plan α touche donc F en tout point d'intersection et par conséquent ce contact a lieu le long d'une conique.

Il résulte de tout ceci que : *Si l'on remplace dans l'équation d'une quadrique inscrite dans le tétraèdre de référence les coordonnées courantes par leurs carrés, on obtient l'équation d'une surface de Kummer (tétraèdroïde de Cayley).*

Liège, le 8 septembre 1953.