EXTRAIT de *Mathesis*, LXI, 1952.

SUR CERTAINES ENVELOPPES DE COURBES,

par M. LUCIEN GODEAUX,
Professeur à l'Université de Liège.

Dans une note déjà ancienne [1], nous avons considéré une surface qui est, de plusieurs manières, enveloppe de systèmes de surfaces. Le procédé utilisé peut servir à définir une courbe plane enveloppe de plusieurs familles de courbes. Nous allons reprendre cette question et y ajouter quelques compléments.

1. L'équation d'une conique inscrite dans le triangle de référence peut s'écrire, en choisissant convenablement le point unitaire,

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 2x_2x_3 - 2x_3x_1 - 2x_1x_2 = 0.$$

Elle est l'enveloppe de la droite

$$\lambda^2 x_1 + \lambda(x_1 + x_2 - x_3) + x_2 = 0.$$

Soient $\varphi_1(x_1, x_2, x_3)$, φ_2, φ_3 trois polynomes entiers, rationnels et homogènes de degré m et $\psi_1(x_1, x_2, x_3)$, ψ_2, ψ_3 trois polynomes analogues de degré n. Considérons la courbe C, d'équation

$$(\varphi_1\psi_1)^2 + (\varphi_2\psi_2)^2 + (\varphi_3\psi_3)^2 - 2\varphi_2\varphi_3\psi_2\psi_3 - 2\varphi_3\varphi_1\psi_3\psi_1 - 2\varphi_1\varphi_2\psi_1\psi_2 = 0,$$

d'ordre $2(m + n)$.

La courbe C peut être considérée comme l'enveloppe de la famille de courbes d'ordre $m + n$,

$$\lambda^2\varphi_1\psi_1 + \lambda(\varphi_1\psi_1 + \varphi_2\psi_2 - \varphi_3\psi_3) + \varphi_2\psi_2 = 0. \tag{1}$$

Elle est aussi l'enveloppe de la famille de courbes

$$\mu^2\varphi_1\psi_1 + \mu(\varphi_1\psi_1 - \varphi_2\psi_2 + \varphi_3\psi_3) + \varphi_3\psi_3 = 0,$$

mais cette famille de courbes ne diffère pas de la famille (1) ; on passe en effet de son équation à l'équation (1) en posant $\mu = -(\lambda + 1)$.

Par contre, la courbe C est l'enveloppe de la famille de courbes

$$\lambda^2\varphi_1\psi_2 + \lambda(\varphi_1\psi_1 + \varphi_2\psi_2 - \varphi_3\psi_3) + \varphi_2\psi_1 = 0, \tag{2}$$

qui diffère certainement de la famille (1).

On trouve aisément que la courbe C est encore l'enveloppe de deux autres familles de courbes, à savoir

[1] BSL, 1935, pp. 106-109.

$$\lambda^2\varphi_1\psi_3 + \lambda(\varphi_1\psi_1 - \varphi_2\psi_2 + \varphi_3\psi_3) + \varphi_3\psi_1 = 0, \tag{3}$$

$$\lambda^2\varphi_2\psi_3 + \lambda(-\varphi_1\psi_1 + \varphi_2\psi_2 + \varphi_3\psi_3) + \varphi_3\psi_2 = 0. \tag{4}$$

Ainsi, *la courbe* C *est l'enveloppe de quatre familles de courbes.*

Lorsque $m = n$, la courbe C est en outre l'enveloppe de trois autres familles de courbes

$$\lambda^2\varphi_1\varphi_2 + \lambda(\varphi_1\psi_1 + \varphi_2\psi_2 - \varphi_3\psi_3) + \psi_1\psi_2 = 0,$$
$$\lambda^2\varphi_1\varphi_3 + \lambda(\varphi_1\psi_1 - \varphi_2\psi_2 + \varphi_3\psi_3) + \psi_1\psi_3 = 0,$$
$$\lambda^2\varphi_2\varphi_3 + \lambda(-\varphi_1\psi_1 + \varphi_2\psi_2 + \varphi_3\psi_3) + \psi_2\psi_3 = 0.$$

2. La courbe C peut être obtenue par un autre procédé.

Considérons les réseaux de courbes

$$\lambda_1\varphi_1 + \lambda_2\varphi_2 + \lambda_3\varphi_3 = 0, \tag{5}$$

$$\mu_1\psi_1 + \mu_2\psi_2 + \mu_3\psi_3 = 0. \tag{6}$$

Entre les courbes de ces réseaux, établissons la correspondance

$$\mu_1 : \mu_2 : \mu_3 = \lambda_2\lambda_3 : \lambda_3\lambda_1 : \lambda_1\lambda_2,$$

c'est-à-dire encore

$$\lambda_1 : \lambda_2 : \lambda_3 = \mu_2\mu_3 : \mu_3\mu_1 : \mu_1\mu_2.$$

Écrivons l'équation (6) sous la forme

$$\lambda_2\lambda_3\psi_1 + \lambda_3\lambda_1\psi_2 + \lambda_1\lambda_2\psi_3 = 0. \tag{7}$$

Deux courbes homologues des faisceaux (5), (7) se coupent en des groupes de mn points. Un point du plan appartient à deux de ces groupes. En effet, si nous fixons les x dans les équations (5), (7) et si nous interprétons les λ comme coordonnées d'un point d'un plan (λ), ces équations représentent une droite et une conique se coupant en deux points.

Recherchons le lieu des points x tels que les groupes de points dont ils font partie soient confondus. Il suffit d'exprimer que dans le plan (λ), la droite (5) est tangente à la conique (7), ou encore que les coordonnées φ_1, φ_2, φ_3 de cette droite satisfont à l'équation tangentielle de la conique. On obtient ainsi

$$\begin{vmatrix} 0 & \varphi_1 & \varphi_2 & \varphi_3 \\ \varphi_1 & 0 & \psi_3 & \psi_2 \\ \varphi_2 & \psi_3 & 0 & \psi_1 \\ \varphi_3 & \psi_2 & \psi_1 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

En développant le déterminant, on retrouve l'équation de la courbe C.

3. Ce qui précède suggère de remplacer la transformation quadratique entre les courbes des réseaux (5), (6) par une autre transformation.

Supposons que l'on ait

$$\mu_1 : \mu_2 : \mu_3 = \lambda_2\lambda_3 : \lambda_3^2 : \lambda_1\lambda_2,$$

d'où l'on déduit

$$\lambda_1 : \lambda_2 : \lambda_3 = \mu_2\mu_3 : \mu_1^2 : \mu_1\mu_2.$$

Les courbes homologues des réseaux (5), (6) se coupent suivant ∞^2 groupes de mn points et un point du plan appartient à deux de ces groupes.

Le lieu des points du plan par lesquels passent deux groupes confondus s'obtient encore en exprimant que la droite (5), de coordonnées φ_1, φ_2, φ_3, est tangente à la conique

$$\lambda_2\,\lambda_3\,\psi_1 + \lambda_3^2\,\psi_2 + \lambda_1\,\lambda_2\,\psi_3 = 0,$$

c'est-à-dire que ces coordonnées satisfont à l'équation tangentielle de la conique. On trouve ainsi

$$\begin{vmatrix} 0 & \varphi_1 & \varphi_2 & \varphi_3 \\ \varphi_1 & 0 & \psi_3 & 0 \\ \varphi_2 & \psi_3 & 0 & \psi_1 \\ \varphi_3 & 0 & \psi_1 & 2\psi_2 \end{vmatrix} = 0,$$

c'est-à-dire

$$(\varphi_1\psi_1 - \varphi_3\psi_3)^2 + 4\varphi_1\varphi_2\psi_2\psi_3 = 0.$$

Cette courbe est l'enveloppe des familles de courbes

$$\lambda^2\varphi_1\psi_3 + \lambda(\varphi_1\psi_1 - \varphi_3\psi_3) - \varphi_2\psi_2 = 0,$$

$$\lambda^2\varphi_1\psi_2 + \lambda(\varphi_1\psi_1 - \varphi_3\psi_3) - \varphi_2\psi_3 = 0$$

et, si $m = n$, de la famille

$$\lambda^2\varphi_1\varphi_2 + \lambda(\varphi_1\psi_1 - \varphi_3\psi_3) - \psi_2\psi_3 = 0.$$

Les points $\varphi_1 = 0$, $\psi_3 = 0$ sont doubles pour la courbe enveloppe.

4. Supposons maintenant qu'entre les courbes des réseaux (5) et (6), nous ayons la correspondance

$$\mu_1 : \mu_2 : \mu_3 = \lambda_1\lambda_2 : \lambda_1^2 : \lambda_2^2 - \lambda_1\lambda_3,$$

dont les formules inverses sont

$$\lambda_1 : \lambda_2 : \lambda_3 = \mu_2^2 : \mu_1\mu_2 : \mu_1^2 - \mu_2\mu_3.$$

Par un point du plan passent deux groupes de *mn* points communs à deux courbes homologues des deux réseaux. Le lieu des points pour lesquels ces deux groupes sont confondus s'obtiendra encore en exprimant que φ_1, φ_2, φ_3 satisfont à l'équation tangentielle de la conique du plan (λ)

$$\lambda_1\lambda_2\psi_1 + \lambda_1^2\psi_2 + (\lambda_2^2 - \lambda_1\lambda_3)\psi_3 = 0.$$

On obtient ainsi

$$\begin{vmatrix} 0 & \varphi_1 & \varphi_2 & \varphi_3 \\ \varphi_1 & 2\psi_2 & \psi_1 & -\psi_3 \\ \varphi_2 & \psi_1 & 2\psi_3 & 0 \\ \varphi_3 & -\psi_3 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

c'est-à-dire

$$(\varphi_2\psi_3 + \varphi_3\psi_1)^2 - 4\varphi_3\psi_3(\varphi_1\psi_3 + \varphi_3\psi_2) = 0.$$

Cette courbe est l'enveloppe d'une unique famille de courbes, à savoir

$$\lambda^2\varphi_3\psi_3 + \lambda(\varphi_2\psi_3 + \varphi_3\psi_1) + \varphi_1\psi_3 + \varphi_3\psi_2 = 0.$$

Cette dernière famille de courbes a *mn* points-base, intersections des courbes $\varphi_3 = 0$, $\psi_3 = 0$. Ces points sont doubles pour la courbe enveloppe.