EXTRAIT de *Mathésis*, LXII, 1953.

SUR UN THÉORÈME DE BERTINI ET LAGUERRE CONCERNANT LES QUARTIQUES GAUCHES RATIONNELLES,

par M. L. GODEAUX,
Professeur à l'Université de Liège.

Si C *est une quartique gauche rationnelle* (quartique de seconde espèce), *il existe trois cordes de cette courbe dont chacune est l'intersection des plans osculateurs à la courbe aux points d'appui (cordes principales) ; ces trois cordes sont les arêtes d'un trièdre.* Cette propriété a été établie par BERTINI (¹) en utilisant une représentation paramétrique de la courbe et, la même année, sous forme corrélative, par LAGUERRE (²) en utilisant la théorie des formes algébriques. Nous nous proposons de démontrer ce théorème au moyen de la représentation plane d'une quadrique.

1. Soient C une quartique gauche rationnelle, Q la quadrique (non conique) passant par cette courbe, $|r|$, $|s|$ les deux systèmes de génératrices rectilignes de Q. Les génératrices d'un mode, par exemple les génératrices r, rencontrent la courbe C en trois points, les autres, s, en un point.

Projetons la quadrique Q sur un plan σ d'un point O de C (³). Soient r_0, s_0 les droites r, s passant par O ; R_0, S_0 leurs points de rencontre avec σ. Aux sections planes de Q correspondent les coniques γ passant par R_0, S_0 ; aux droites r correspondent les droites passant par S_0 et aux droites s, les droites passant par R_0. A la courbe C correspond une cubique C′ ayant un point double en R_0, ne passant pas par S_0.

Par le point S_0, on peut mener quatre tangentes à C′, par conséquent, il y a quatre génératrices de $|r|$ tangentes à la courbe C. Nous prendrons une de ces droites pour r_0, nous désignerons par O′ le point de contact avec C et nous prendrons pour O le second point de rencontre de r_0 avec C. Dans ces conditions, la courbe C′ a un point de rebroussement en R_0, la tangente en ce point étant découpée sur σ par le plan osculateur en O′ à la courbe C.

(¹) *Sulla curva gobba di 4° ordine e 2ª specie* (RENDICONTI ISTITUTO LOMBARDO, 1872). Voir aussi BERTINI, *Complementi di Geometria proiettiva* (Bologne, Zanichelli, 1928).

(²) *Recherches analytiques sur la surface réciproque de la surface de* STEINER (NA, 1872 et 1873) ; *Oeuvres de Laguerre*, t. II (Paris, Gauthier-Villars, 1905).

(³) Au sujet de la représentation plane d'une quadrique, voir notre *Introduction à la Géométrie supérieure* (Liège, Sciences et Lettres et Paris, Masson, 1940).

Soient A_1, A_2 les points d'appui sur C d'une corde principale et A'_1, A'_2 leurs correspondants sur C'. Les plans osculateurs à C en A_1, A_2 doivent passer par la droite A_1A_2. Ces plans osculateurs coupent $\underset{\sim}{Q}$ suivant deux coniques Γ_1, Γ_2 ; la première oscule C en A_1 et passe par A_2, la seconde oscule C en A_2 et passe par A_1. Il leur correspond sur σ deux coniques γ_1, γ_2 passant par R_0, S_0, la première osculant C' en A'_1 et passant par A'_2, la seconde osculant C' en A'_2 et passant par A'_1.

Inversement, si deux coniques γ_1, γ_2 jouissent des propriétés précédentes, la droite A_1A_2 est une corde principale de C.

Pour démontrer que C possède trois cordes principales, il suffira donc de démontrer que par le point de rebroussement de la cubique plane C' et par un point S_0, il passe trois couples de coniques analogues à γ_1, γ_2.

Soient B_1, B_2 les points d'appui d'une seconde corde principale à C, B'_1, B'_2 les points qui leur correspondent sur C'. Si les cordes A_1A_2 et B_1B_2 se rencontrent, les quatre points A_1, A_2, B_1, B_2 se trouvent sur une section plane de $\underset{\sim}{Q}$ et à cette section, correspond une conique γ passant par R_0, S_0, A'_1, A'_2, B'_1, B'_2. Et réciproquement, si cette conique γ existe, les cordes A_1A_2 et B_1B_2 se rencontrent.

Observons que s'il existe trois cordes principales de C se rencontrant deux à deux, comme elles ne peuvent être situées dans un même plan, elles passent par un même point.

2. Nous sommes donc ramené à une question sur les cubiques planes cuspidales. Par un choix convenable du triangle de référence et du point unitaire, l'équation de C' peut s'écrire

$$x_3x_1^2 - x_2^3 = 0.$$

Les équations paramétriques de cette courbe sont

$$\frac{x_1}{1} = \frac{x_2}{u} = \frac{x_3}{u^3}.$$

Commençons par résoudre la question suivante : Soient u_1, u_2 les paramètres de deux points de C', γ_1 une conique passant par le point de rebroussement O_3 (0, 0, 1), osculant C' en u_1 et passant par u_2, γ_2 une conique passant par O_3, osculant C' en u_2 et passant par u_1. Cherchons le quatrième point d'intersection de ces deux coniques.

L'équation d'une conique passant par O_3 s'écrit

$$x_2x_3 + a_1x_1x_3 + a_2x_2^2 + a_3x_1x_2 + a_4x_1^2 = 0$$

et les paramètres de ses points d'intersection avec C' sont racines de l'équation

$$u^4 + a_1u^3 + a_2u^2 + a_3u + a_4 = 0.$$

Pour γ_1, cette équation doit avoir u_1 comme racine triple et u_2 comme racine simple. On en déduit que γ_1 a pour équation

$$x_2x_3 - (3u_1 + u_2)x_1x_3 + 3u_1(u_1 + u_2)x_2^2 - u_1^2(u_1 + 3u_2)x_1x_2 + u_1^3u_2x_1^2 = 0.$$

La conique γ_2 a pour équation

$$x_2x_3 - (u_1 + 3u_2)x_1x_3 + 3u_2(u_1 + u_2)x_2^2 - u_2^2(u_1 + 3u_1)x_1x_2 + u_1u_2^2x_1^2 = 0.$$

Éliminons x_3 entre ces équations et posons

$$V_1 = u_1 + u_2, \qquad V_2 = u_1u_2.$$

Après avoir divisé par $u_2 - u_1$, on obtient

$$3V_1x_2^3 - 2(2V_1^2 + V_2)x_2^2x_1 + V_1(V_1^2 + 5V_2)x_2x_1^2 - V_2(V_1^2 + 2V_2)x_1^3 = 0.$$

Le premier membre de cette équation est divisible par

$$x_2^2 - V_1x_1x_2 + V_2x_1^2$$

qui, égalé à zéro, représente les droites passant par O_3 et par les points u_1, u_2. On obtient comme quotient

$$3V_1x_2 - (V_1^2 + 2V_2)x_1 = 0.$$

On en déduit facilement que les coordonnées du quatrième point commun à γ_1, γ_2 sont : $6V_1$, $2(V_1^2 + 2V_2)$, $3V_1^2V_2$.

3. Donnons-nous maintenant le point S :

$$\frac{y_1}{6V_1} = \frac{y_2}{2(V_1^2 + 2V_2)} = \frac{y_3}{3V^1V_2}. \qquad (1)$$

Si les quantités V_1, V_2 satisfont aux équations précédentes, il existe une conique γ_1 et une conique γ_2 satisfaisant aux conditions précédentes, les paramètres u_1, u_2 étant racines de l'équation

$$u^2 - V_1u + V_2 = 0.$$

Des équations (1), on déduit

$$y_1V_1^3 - 3y_2V_1^2 + 4y_3 = 0, \qquad (2)$$

$$y_1V_1V_2 = 2y_3. \qquad (3)$$

L'équation (2) a trois racines V_1, V_1', V_1'' et à chacune d'elles, l'équation (3) fait correspondre des valeurs V_2, V_2', V_2''. On en conclut que la quartique gauche rationnelle C possède bien trois cordes principales.

4. Soient V_1, V_1' deux racines de l'équation (2) et V_2, V_2' les quantités qui leur correspondent par l'équation (3), u_1 et u_2, u_1' et u_2' les racines des équations

$$u^2 - V_1 u + V_2 = 0, \quad u^2 - V_1' u + V_2' = 0.$$

La conique passant par le point de rebroussement O_3 et par les points de paramètres u_1, u_2, u_1', u_2' a pour équation

$$x_2 x_3 - (V_1 + V_1')x_1 x_3 + (V_1 V_1' + V_2 + V_2')x_2^2 -$$
$$- (V_1 V_2' + V_2 V_1')x_1 x_2 + V_2 V_2' x_1^2 = 0.$$

Un calcul simple montre que la condition pour que cette conique passe par le point y, de coordonnées (1), est que l'expression

$$[V_1 V_1' - 2(V_2 + V_2')](2V_1^4 - 7V_1^2 V_2 - 4V_2^2)$$

soit nulle.

Soient V_1'' la troisième racine de l'équation (2), V_2'' la valeur de V_2 qui lui correspond par l'équation (3). Nous avons

$$V_1' V_1'' + V_1'' V_1 + V_1 V_1' = 0, \quad V_1 V_1' V_1'' = -4 \frac{y_3}{y_1}. \qquad (4)$$

En utilisant la relation (3), la première de ces relations donne

$$V_2 + V_2' + V_2'' = 0. \qquad (5)$$

Par (3), nous avons

$$V_1'' = 2 \frac{y_3}{y_1 V_2''}$$

d'où, par la seconde des relations (4),

$$V_1 V_1' + 2V_2'' = 0$$

et par conséquent, par (3)

$$V_1 V_1' - 2(V_2 + V_2') = 0.$$

On voit donc que la conique passant par O_3 et par les points de paramètres u_1, u_2, u_1', u_2' passe par le point S ou y, de coordonnées (1). D'après ce qu'on a vu plus haut, on en conclut que les trois cordes principales de la courbe C sont deux à deux dans un même plan et passent donc par un même point.