EXTRAIT de *Mathésis*, LXIII, 1954.

SUR LA REPRÉSENTATION PLANE DE LA SURFACE CUBIQUE ET SUR UNE TRANSFORMATION BIRATIONNELLE QUI S'EN DÉDUIT,

par Lucien GODEAUX,
Professeur à l'Université de Liège.

En partant de l'équation de la surface cubique mise sous forme d'un déterminant à neuf éléments égalé à zéro, nous obtenons de deux manières la représentation plane de la surface et nous en déduisons une transformation birationnelle d'ailleurs bien connue. Ces développements ont fait, à plusieurs reprises, l'objet d'une leçon de notre cours de géométrie supérieure ; ils traitent de questions connues, mais que nous espérons de nature à intéresser les jeunes lecteurs de *Mathesis*.

1. Désignons par

$$\varphi_{ik}(x) \equiv \varphi_{ik}(x_1, x_2, x_3, x_4), \qquad (i, k = 1, 2, 3)$$

neuf formes linéaires en x_1, x_2, x_3, x_4. L'équation

$$\begin{vmatrix} \varphi_{11} & \varphi_{12} & \varphi_{13} \\ \varphi_{21} & \varphi_{22} & \varphi_{23} \\ \varphi_{31} & \varphi_{32} & \varphi_{33} \end{vmatrix} = 0 \qquad (1)$$

représente une surface cubique F.

Écrire que le déterminant de l'équation (1) est nul signifie qu'il existe trois quantités y_1, y_2, y_3 telles que

$$\left.\begin{aligned} y_1\varphi_{11} + y_2\varphi_{12} + y_3\varphi_{13} = 0, \\ y_1\varphi_{21} + y_2\varphi_{22} + y_3\varphi_{23} = 0, \\ y_1\varphi_{31} + y_2\varphi_{32} + y_3\varphi_{33} = 0. \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Interprétons y_1, y_2, y_3 comme coordonnées des points d'un plan η. A un point x de la surface F correspond un point y du plan η et inversement, à un point y du plan η correspond en général un point x de la surface F. Nous obtenons donc une représentation point par point de F sur le plan η.

Pour étudier de plus près cette correspondance, posons

$$y_1\varphi_{i1} + y_2\varphi_{i2} + y_3\varphi_{i3} = x_1\psi_{i1} + x_2\psi_{i2} + x_3\psi_{i3} + x_4\psi_{i4}, \qquad (i = 1, 2, 3)$$

les ψ étant des formes linéaires en y_1, y_2, y_3.

Aux points de la section de F par le plan

$$\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \lambda_3 x_3 + \lambda_4 x_4 = 0$$

correspond dans le plan η la courbe d'équation

$$\begin{vmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 & \lambda_4 \\ \psi_{11} & \psi_{12} & \psi_{13} & \psi_{14} \\ \psi_{21} & \psi_{22} & \psi_{23} & \psi_{24} \\ \psi_{31} & \psi_{32} & \psi_{33} & \psi_{34} \end{vmatrix} = 0,$$

c'est-à-dire une cubique Γ_3.

Quel que soit le plan de la section de F, la cubique Γ_3 passe par les points annulant les quatre déterminants de la matrice

$$\begin{Vmatrix} \psi_{11} & \psi_{12} & \psi_{13} & \psi_{14} \\ \psi_{21} & \psi_{22} & \psi_{23} & \psi_{24} \\ \psi_{31} & \psi_{32} & \psi_{33} & \psi_{34} \end{Vmatrix} = 0. \tag{3}$$

Ces points sont au nombre de six. En effet, les déterminants obtenus en supprimant la première ou la deuxième colonne représentent des cubiques qui se coupent en 9 points. Les points qui annulent les déterminants de la matrice

$$\begin{Vmatrix} \psi_{13} & \psi_{23} & \psi_{33} \\ \psi_{14} & \psi_{24} & \psi_{34} \end{Vmatrix} = 0 \tag{4}$$

annulent les deux déterminants considérés, mais non les autres déterminants tirés de la matrice (3). La matrice (2) s'annule pour trois points, donc la matrice (3) s'annule pour six points que nous désignerons par $A_1, A_2, \ldots, A_6$.

Ainsi donc, *aux sections planes de la surface* F *correspondent les cubiques* Γ_3 *passant par six points* $A_1, A_2, \ldots, A_6$.

2. Les homologues sur F des points $A_1, A_2, \ldots, A_6$ du plan η sont indéterminés ; nous lèverons cette indétermination par un passage à la limite.

Observons que la correspondance entre les plans des sections de F et les cubiques Γ_3 est une projectivité et qu'aux courbes Γ_3 d'un réseau correspondent les plans d'une gerbe.

Soit r une droite du plan η passant par A_1. Les cubiques Γ_3 touchant r en A_1 forment un réseau et il leur correspond les plans d'une gerbe passant par un point A_1' de F. Lorsque r tourne autour de A_1, le point A_1' décrit une droite a_1 tracée sur F. En effet, il y a un faisceau de cubiques Γ_3 ayant un point double en A_1 ; il correspond à ce faisceau un faisceau de plans contenant tous les points A_1' et a_1 est donc l'axe de ce faisceau. Nous dirons en abrégé qu'aux points infiniment voisins de A_1 dans le plan η correspondent les points de la droite a_1 sur F.

En partant des points $A_2, A_3, \ldots, A_6$ on obtient de même des droites $a_2, a_3, \ldots, a_6$. On voit aisément que les six droites $a_1, a_2, \ldots, a_6$ ne se rencontrent pas deux à deux.

3. A une courbe D d'ordre n du plan η, passant s_1 fois par A_1, s_2 fois par $A_2, \ldots, s_6$ fois par A_6 correspond sur F une courbe Δ d'ordre

$$m = 3n - s_1 - s_2 \ldots - s_6,$$

s'appuyant en s_1 points sur a_1, s_2 points sur $a_2, \ldots, s_6$ points sur a_6.

Considérons en particulier les coniques passant par cinq des points A et désignons par β_i celle de ces coniques ne passant pas par A_i. A la conique β_i correspond sur F une droite b_i s'appuyant en un point sur chacune des droites $a_1, a_2, \ldots, a_6$ sauf sur a_i, droite qu'elle ne rencontre pas.

Nous obtenons ainsi sur F six nouvelles droites $b_1, b_2, \ldots, b_6$ formant avec $a_1, a_2, \ldots, a_6$ un double-six. Chaque droite a rencontre cinq droites b et chaque droite b rencontre cinq droites a. Les droites a_i, b_i de même indice ne se rencontrent pas.

A une droite du plan η ne passant par aucun des points A correspond sur F une cubique gauche K ne rencontrant pas les droites a mais rencontrant chacune des droites b en deux points. Deux de ces cubiques gauches ne se rencontrent qu'en un point.

Les équations de ces cubiques gauches s'obtiennent aisément. Si

$$\mu_1 y_1 + \mu_2 y_2 + \mu_3 y_3 = 0$$

est l'équation de la droite du plan η, les points de K annulent tous les déterminants tirés de la matrice

$$\left\| \begin{matrix} \mu_1 & \mu_2 & \mu_3 \\ \varphi_{11} & \varphi_{12} & \varphi_{13} \\ \varphi_{21} & \varphi_{22} & \varphi_{23} \\ \varphi_{31} & \varphi_{32} & \varphi_{33} \end{matrix} \right\| = 0. \qquad (5)$$

4. Retournons à l'équation (1) de F. Il existe trois nombres z_1, z_2, z_3 tels que

$$z_1\varphi_{11} + z_2\varphi_{21} + z_3\varphi_{31} = 0,$$
$$z_1\varphi_{12} + z_2\varphi_{22} + z_3\varphi_{32} = 0,$$
$$z_1\varphi_{13} + z_2\varphi_{23} + z_3\varphi_{33} = 0.$$

Si nous interprétons les z comme coordonnées des points d'un plan ζ, il existe une correspondance biunivoque entre les points de F et ceux de ζ.

Aux sections planes de F correspondent dans ζ des cubiques Γ_3' passant par six points $B_1, B_2, \ldots, B_6$. Et on peut faire ici la même théorie que tantôt. Nous retiendrons seulement ceci : aux points d'une droite

$$\nu_1 z_1 + \nu_2 z_2 + \nu_3 z_3 = 0$$

de ζ correspondent sur F les points d'une cubique gauche K′ annulant les déterminants de la matrice

$$\left\| \begin{matrix} \nu_1 & \varphi_{11} & \varphi_{12} & \varphi_{13} \\ \nu_2 & \varphi_{21} & \varphi_{22} & \varphi_{23} \\ \nu_3 & \varphi_{31} & \varphi_{32} & \varphi_{33} \end{matrix} \right\| = 0. \qquad (6)$$

5. A un point y de η correspond un point x de F et à ce point correspond un point z de ζ, et inversement. Il existe donc entre les plans η et ζ une correspondance biunivoque que nous allons étudier.

Écrivons l'équation

$$\begin{vmatrix} 0 & \mu_1 & \mu_2 & \mu_3 \\ \nu_1 & \varphi_{11} & \varphi_{12} & \varphi_{13} \\ \nu_2 & \varphi_{21} & \varphi_{22} & \varphi_{23} \\ \nu_3 & \varphi_{31} & \varphi_{32} & \varphi_{33} \end{vmatrix} = 0. \qquad (7)$$

Cette équation représente une quadrique Q. Si l'on supprime la première colonne, on retrouve les équations (5). Si au contraire on supprime la première ligne, on retrouve les équations (6), donc Q coupe F suivant une cubique gauche K et une cubique gauche K'.

La cubique K s'appuyant en deux points sur chaque droite b et ne rencontrant pas les droites a, la cubique K' s'appuie en deux points sur chaque droite a et ne rencontre pas les droites b. Comme K' correspond à une droite du plan ζ, les points d'une droite b ne peuvent correspondre qu'aux points infiniment voisins d'un des points B. Nous supposerons que la droite b_i correspond au point B_i ($i = 1, 2, ..., 6$).

Considérons les coniques déterminées par cinq des points B et désignons par α_i celle qui ne passe pas par le point B_i. On a six coniques $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_6$ correspondant sur F à des droites dont chacune s'appuie sur cinq des droites b. Ce sont donc les droites a et nous appellerons a_i la droite qui correspond à la conique α_i.

6. Une quadrique coupe F suivant une courbe du sixième ordre s'appuyant en deux points sur chacune des droites a. A cette courbe correspond dans le plan η une courbe du sixième ordre ayant $A_1, A_2, ..., A_6$ comme points doubles et dans le plan ζ une courbe du sixième ordre ayant les points $B_1, B_2, ..., B_6$ comme points doubles.

En particulier, à la section de F par la quadrique Q, d'équation (7), correspond dans le plan η une sextique dégénérée en une droite, qui correspond à K, et en une courbe C du cinquième ordre, ayant $A_1, A_2, ..., A_6$ comme points doubles, correspondant à K'. A la même section correspond dans le plan ζ une droite, homologue de K', et une courbe C' du cinquième ordre ayant $B_1, B_2, ..., B_6$ comme points doubles, homologue de K.

Observons que deux courbes C (ou C') se coupent en dehors des points doubles, en un seul point variable avec les courbes ; elles forment un réseau homaloïdal $|C|$ (ou $|C'|$).

Nous sommes maintenant en mesure de donner les propriétés de la transformation T existant entre les plans η, ζ.

A un point y de η correspond un point x de F et à ce point, un point z de ζ.

Aux points d'une droite de η correspondent les points d'une cubique gauche K de F et aux points de celle-ci, les points d'une quintique C' de ζ. De même, à une droite de ζ correspond une quintique C de η.

Aux points infiniment voisins du point A_i correspondent les points de la droite a_i de F et à ces points, les points de la conique α_i de ζ. De même, aux points infiniment voisins du point B_i correspondent les points de la conique β_i de η.

En résumé : *On peut établir entre deux plans une transformation birationnelle qui fait correspondre aux droites d'un plan des courbes du cinquième ordre ayant six points doubles dans l'autre. Aux points infiniment voisins d'un des points doubles dans un plan correspond une conique passant par cinq des points doubles de l'autre.*

7. Les développements précédents peuvent s'étendre à condition de faire intervenir les hyperespaces. La généralisation a été étudiée par O. Rozet [1], qui a obtenu une transformation birationnelle entre deux espaces à trois dimensions. Aux plans d'un des espaces correspondent dans l'autre des surfaces du onzième ordre passant trois fois par une courbe d'ordre dix et de genre onze et par les vingt quadrisécantes de cette courbe.