Extrait de *Mathésis*, LXII, 1953.

TRANSFORMATIONS BIRATIONNELLES INVOLUTIVES LAISSANT INVARIANT LE SYSTÈME DES CUBIQUES PLANES PASSANT PAR SIX POINTS FIXES,

par L. Godeaux,
Professeur à l'Université de Liège.

Dans la démonstration du théorème de Bertini sur la réductibilité des transformations birationnelles involutives du plan à quatre types ([1]), on est conduit à considérer les transformations birationnelles involutives laissant invariant le système linéraire des cubiques planes passant par six points. On voit facilement que cette transformation est du type de Geiser ou du type de Jonquières. Cela suffit pour la démonstration du théorème de Bertini, mais la détermination complète de ces transformations peut néanmoins présenter un certain intérêt. C'est cette détermination que nous nous proposons de faire ici. Nous démontrerons précisément le théorème suivant :

Si une transformation birationnelle involutive plane laisse invariant le système linéaire des cubiques planes ayant six points-base, deux cas peuvent se présenter :

1° *La transformation fait se correspondre les points d'intersection variables des cubiques passant par sept points, six de ceux-ci étant alignés par couples sur le septième :*

2° *La transformation fait se correspondre les points conjugués par rapport à une conique, alignés sur un point fixe, ou est une transformée birationnelle de cette transformation.*

1. Soit $|C|$ le système linéaire des cubiques planes passant par six points fixes A_1, A_2, ..., A_6. Proposons-nous de déterminer les transformations birationnelles involutives T pour lesquelles ce système est invariant.

Le système $|C|$ ayant le degré trois, ne peut être composé au moyen de l'involution I_2 engendrée par T. Par conséquent, en rapportant projectivement les courbes C aux plans de l'espace, nous obtenons une surface cubique F représentable point par point sur le plan σ contenant le système $|C|$.

([1]) Voir par exemple notre ouvrage sur la *Géométrie algébrique*, tome II, p. 173 (Liège, Sciences et Lettres et Paris, Masson, 1949) ou notre fascicule du Mémorial des Sciences mathématiques sur *Les transformations birationnelles du plan* (Paris, Gauthier-Villars, 1953).

A la transformation T correspond une transformation birationnelle involutive T′ de F en soi. Cette transformation échange entre elles les sections planes de F, donc elle est déterminée par une homographie de l'espace. Celle-ci étant involutive, T′ est soit une homologie harmonique, soit une homographie biaxiale harmonique.

Nous examinerons successivement ces deux cas.

2. Supposons en premier lieu que T′ soit une homologie harmonique, de centre A et de plan α. Deux points homologues P, P′ de F sont alignés sur A et par suite ce point appartient à F.

Choisissons la figure de référence de telle sorte que T′ ait pour équations

$$x_1' : x_2' : x_3' : x_4' = x_1 : x_2 : x_3 : -x_4.$$

L'équation de la surface F s'écrit

$$x_4^2\varphi_1(x_1, x_2, x_3) + \varphi_3(x_1, x_2, x_3) = 0,$$

où φ_1, φ_3 sont des formes dont le degré est indiqué par l'indice.

Le plan $\varphi_1 = 0$, tangent à F en A (0, 0, 0, 1), coupe F suivant trois droites $\varphi_1 = 0, \varphi_3 = 0$ passant par A, de sorte que A est un point d'Eckardt. Désignons par r_1, r_2, r_3 ces trois droites, par r_1', r_2', r_3' celles qui leur correspondent dans le plan σ. Si A_0 est le point de σ qui correspond au point A de F, les droites r_1', r_2', r_3' passent par A_0 et d'autre part, les points A_1, A_2, ..., A_6 se distribuent sur les trois droites r_1', r_2', r_3' puisque l'ensemble de ces droites forme une courbe C.

Nous supposerons, que des six points A_1, A_2, ..., A_6, trois ne sont jamais sur une même droite et qu'ils n'appartiennent pas à une même conique. Il serait facile d'étudier les cas que nous écartons ainsi ; ce ne sont d'ailleurs que des cas limites de celui que nous étudions ici.

Cela étant, soit a_1 la droite de F qui représente le domaine du point A_1 de σ. Cette droite s'appuie sur l'une des droites r_1, r_2, r_3, par exemple sur r_1. Le plan a_1r_1 est uni pour l'homologie T′ et coupe encore F suivant une droite b_1. T′ fait correspondre b_1 à a_1.

Nous allons modifier nos notations : nous désignerons par A_{11}, A_{12} les points A_1, A_2, ..., A_6 appartenant à r_1', par A_{21}, A_{22} ceux qui appartiennent à r_2', par A_{31}, A_{32} ceux qui appartiennent à r_3'. Les droites qui correspondent sur F aux domaines des points A_{11}, A_{12}, ..., A_{32} seront désignées par a_{11}, a_{12}, ..., a_{32} ; les deux premières s'appuient sur r_1, les deux suivantes sur r_2 et les deux dernières sur r_3. A la droite a_{ik}, T′ fait correspondre la droite b_{ik} qui, avec les droites r_i, a_{ik} complète l'intersection de F avec le plan de ces deux dernières droites.

Reprenons la droite a_{11} et sa transformée b_{11}. Cette dernière droite s'appuie sur r_1 et ne rencontre pas le plan contenant les droites r_1, a_{12}, b_{12} en dehors de r_1. Elle rencontre le plan contenant les droites r_2, a_{21}, b_{21} en dehors de r_2. Si b_{11} rencontrait b_{21} en un point, T' ferait correspondre à ce point un point commun à a_{11}, a_{21}. Or, ces droites ne peuvent se rencontrer puisque A_{11}, A_{21} sont des points distincts du plan σ. On en conclut que b_{11} rencontre a_{21} et que, de même, elle rencontre a_{22}, a_{31}, a_{32}. De plus, elle rencontre a_{11} mais ne rencontre pas a_{12}. Par conséquent, la droite b_{11} représente la conique β_{11} de σ déterminée par les points A_{11}, A_{21}, A_{22}, A_{31}, A_{32}.

On arrive à des conclusions analogues pour les droites $b_{12}, \ldots, b_{32}$.

3. Aux sections de F par les plans passant par A correspondent dans σ les cubiques C passant par le point A_0 ; désignons ces cubiques par C_0. Elles forment un réseau ayant sept points-base et par conséquent T fait correspondre à un point P le neuvième point d'intersection P' des cubiques C_0 passant par P. T est donc une transformation de Geiser, mais une transformation particulière comme on va le voir.

A une droite de σ correspond sur F une cubique gauche K s'appuyant en deux points sur chacune des droites $b_{11}, b_{12}, \ldots, b_{32}$. Le cône projetant K du point A coupe F suivant K, suivant les droites r_1, r_2, r_3 et enfin suivant une cubique gauche K' transformée de K dans l'homologie T'. La courbe K' s'appuie en deux points sur chacune des droites $a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{32}$; elle ne passe pas par A et il lui correspond, dans σ, une courbe du cinquième ordre passant doublement par les six points $A_{11}, A_{12}, \ldots, A_{32}$. La transformation T fait correspondre aux droites du plan des courbes A d'ordre cinq, passant deux fois par six points et formant donc un réseau homaloïdal.

D'après ce qu'on a vu, aux points infiniment voisins du point A_{11}, T fait correspondre les points de la conique β_{11} passant par A_{11}, A_{21}, A_{22}, A_{31}, A_{32}, ... et aux points infiniment voisins de A_{32}, correspondent les points de la conique β_{32} passant par A_{32}, A_{11}, A_{12}, A_{21}, A_{22}.

Les points unis de T correspondent aux points unis de T', ce sont donc le point A_0, uni isolé, et les points de la courbe C, soit C_1, qui correspond à la section de F par le plan d'homologie α.

A une droite s du plan σ correspond une courbe Δ rencontrant s aux trois points de rencontre de cette droite avec C_1 et en deux points qui se correspondent dans T. Si la droite s passe par A_0, la courbe Δ qui lui correspond, la touche en ce point.

4. Passons maintenant au cas où T' est une homographie biaxiale harmonique, d'axes r et s. Une droite s'appuyant sur r et s est unie pour T′ et rencontre F en deux points homologues ; il en résulte que l'une des droites, par exemple r, doit appartenir à F. L'autre axe, s, rencontre F en trois points S_1, S_2, S_3. Le plan tangent à F en S_1 est uni pour T′ et passe donc par r ; il rencontre F suivant deux droites s_{11}, s_{12} passant par S_1. De même, le plan tangent à F en S_2, coupe F, en dehors de r, suivant deux droites s_{21}, s_{22} passant par S_2 et le plan tangent à F en S_3 coupe cette surface suivant deux droites s_{31}, s_{32} passant par S_3.

Il existe encore quatre droites de F s'appuyant sur r ; soit a_1 une de ces droites. Elle ne peut s'appuyer sur s et n'est donc pas unie. Il lui correspond une droite a_1' coupant r au même point que a_1. Le plan a_1a_1' est uni pour T′ et passe donc par r. Soit b_1 la neuvième droite de F s'appuyant sur r ; il lui correspond une droite b_1' coupant r au même point que b_1 et située dans le plan rb_1.

Pour représenter la surface F point par point sur un plan σ', il suffit de connaître six droites de F ne se rencontrant pas deux à deux. Les droites s_1, s_2, s_3, a_1, b_1 ne se rencontrent pas deux à deux et s'appuient sur r, par conséquent il existe une sixième droite a de F ne rencontrant pas les précédentes [1]. De plus a ne rencontre pas r. Nous pouvons donc représenter F sur un plan σ' de telle sorte qu'aux sections planes correspondent les courbes C′, du troisième ordre, passant par six points S_1', S_2, S_3', A_1, B_1, A correspondant aux droites s_{11}, s_{21}, s_{31}, a_1, b_1 et a. Dans cette représentation, la droite r correspond à la conique β passant par S_1', S_2', S_3', A_1, B_1.

Considérons un plan passant par r ; il coupe F suivant une conique γ à laquelle correspond point par point dans σ' une droite d passant par A. Sur γ, T′ détermine une involution ayant pour points unis les points de rencontre de γ avec r, donc sur d, T détermine une involution ayant comme points unis les points de rencontre de cette droite avec la conique β. T fait donc correspondre à un point P son conjugué P′ par rapport à la conique β situé sur la droite AP. On sait que cette transformation est quadratique et fait correspondre à une droite du plan une conique passant par A et par les points de rencontre de β avec la polaire de A.

---

[1] La propriété que nous utilisons ici s'établit très simplement. Soit F une surface cubique représentée sur un plan σ par les cubiques passant par les six points A_1, A_2, ..., A_6. Aux droites A_1A_2, A_1A_3 et aux coniques β_4 passant par les points A sauf A_4, β_5, β_6 (de définitions analogues) correspondent sur F cinq droites, ne se rencontrant pas deux à deux. A la droite A_2A_3, correspond une droite qui ne rencontre pas les autres. En somme, cinq droites d'une surface cubique ne se rencontrant pas deux à deux et s'appuyant sur une même droite, font partie d'un sixain, c'est-à-dire d'un groupe de six droites ne se rencontrant pas deux à deux.

Aux droites s_{12}, s_{22}, s_{32} correspondent respectivement les droites AS_1', AS_2', AS_3'. A la droite a_1' correspond la droite AA_1 et à la droite b_1', la droite AB_1.

Observons qu'à a_1 correspond a_1', donc dans la transformation T, au domaine du point A_1 doivent correspondre les points de la droite AA_1. Il en résulte que cette droite est tangente à la conique β au point A_1. De même la droite AB_1 touche β au point B_1.

Sur la surface F, T′ fait correspondre à a l'intersection de F avec la quadrique lieu des droites s'appuyant sur r, s et a. Comme a rencontre les droites s_{12}, s_{22}, s_{32}, a_1', b_1', cette quadrique passe par s_{12}, s_{22}, s_{32} et rencontre encore F suivant une droite a', transformée de a. La droite a' s'appuie sur a_1 et b_1. A a' correspond dans σ' la polaire de A par rapport à β, donc cette polaire passe bien par A_1, B_1.

Pour construire F, nous sommes partis de σ puis nous avons représenté F sur σ' ; les plans σ et σ' sont donc liés par une transformation birationnelle, d'où la seconde partie de notre énoncé. On peut observer que les transformations birationnelles entre les plans σ, σ' doivent transformer $|C|$ en $|C'|$; ces transformations sont donc des transformations quadratiques ayant comme points fondamentaux trois points-base de $|C|$.