EXTRAIT DU *Bulletin de la Société royale des Sciences de Liége*,
Séance du 15 juin 1939, nos 6-7.

Construction de surfaces projectivement canoniques,

par LUCIEN GODEAUX, Membre de la Société.

M. Enriques a appelé à diverses reprises l'attention sur la détermination des surfaces algébriques dont les sections hyperplanes sont les courbes canoniques (1), surfaces que nous avons proposé d'appeler « surfaces projectivement canoniques » plutôt que surfaces canoniques, pour les distinguer des surfaces canoniques d'une variété algébrique (2) Nous nous proposons, dans cette note, de construire quelques surfaces projectivement canoniques nouvelles.

1. Soit F une surface projectivement canonique (normale) de l'espace S_r à r dimensions. Désignons par C ses sections hyperplanes, c'est-à-dire ses courbes canoniques. Si $p^{(1)}$ désigne le genre linéaire de la surface F, celle-ci est d'ordre $p^{(1)} - 1$ et les courbes C sont de genre $p^{(1)}$. Le système bicanonique de F, c'est-à-dire le système adjoint à $|C|$, est découpé sur F par les hyperquadriques de S_r.

Commençons par construire des courbes C sur lesquelles le système canonique est découpé par les hyperquadriques.

Considérons, dans un plan ϖ, le système complet des courbes Γ_n d'ordre n et rapportons projectivement ces courbes aux hyperplans d'un espace S_ρ à $\rho = \frac{1}{2}n(n+3)$ dimensions. Aux points du plan correspondent ceux d'une surface Φ, d'ordre n^2. Aux courbes d'ordre $2n$ du plan ϖ correspondent sur Φ les sections de cette surface par les hyperquadriques de S_ρ. Ceci rappelé, considérons dans le plan ϖ une courbe Γ_{2n+3} d'ordre $2n+3$; il lui correspond, sur la surface Φ, une courbe C d'ordre $n(2n+3)$ sur laquelle la série canonique complète est découpée par les hyperquadriques de S_ρ. La courbe C est de genre $(n+1)(2n+1)$ et ce nombre, diminué d'une unité, est égal à l'ordre de la courbe.

Soit Γ_{n-3} une courbe d'ordre $n-3$ du plan ϖ et supposons en premier lieu $n \geq 3$. A la courbe Γ_{n-3} correspond, sur Φ, une courbe D d'ordre $n(n-3)$, normale dans un espace linéaire à

(1) Voir, par exemple, ENRIQUES-CAMPEDELLI, *Lezioni sulla teoria delle superficie algebriche*, Padova, 1932.

(2) Sur les surfaces algébriques dont les sections hyperplanes sont les courbes canoniques (*Bull. de la Soc. Roy. des Sciences de Liége*, 1937, pp. 92-96, 132-135, 154-155).

$\frac{1}{2}(n^2 + 3n - 20)$ dimensions. Aux courbes d'ordre $3n$ du plan ϖ correspondent sur Φ les sections de cette surface par les hypersurfaces cubiques de S_ρ ; par conséquent, la courbe C est découpée par une hypersurface cubique de S_ρ passant par la courbe D.

Si $n = 2$, la courbe C est d'ordre quatorze et de genre quinze, elle est découpée, sur Φ, par une hypersurface du quatrième ordre contenant une conique de la surface Φ (qui est actuellement une surface de Veronese).

2. Supposons $n > 3$ et considérons, dans un espace $S_{\rho+1}$ à $\rho + 1$ dimensions, le cône Φ_1 qui projette d'un point O la surface Φ. La courbe D est projetée de O suivant une surface conique D_1 d'ordre $n(n-3)$. Considérons une hypersurface cubique V_ρ^3 passant par le cône D_1; elle coupe encore Φ_1 suivant une surface F d'ordre $n(2n-3)$, dont les sections hyperplanes sont des courbes C de genre $(n+1)(2n+1)$.

Le système canonique des courbes C étant découpé par les hyperquadriques de $S_{\rho+1}$, l'adjoint de $|C|$, sur la surface F, est le système $|2C|$. Il en résulte que les courbes C sont les courbes canoniques de la surface F.

Supposons $n = 3$ et considérons, dans un espace S_{10}, à dix dimensions, la projection de la surface Φ du neuvième ordre, à partir d'un point O. La section du cône Φ_1 obtenu, par une hypersurface cubique V_9^3, est une surface F d'ordre vingt-sept, dont les sections hyperplanes C sont de genre vingt-huit. Comme dans le cas précédent, on démontre que les courbes C sont les courbes canoniques de la surface F.

Si $n = 2$, considérons, dans un espace S_6 à six dimensions, la projection Φ_1 de la surface de Veronese Φ à partir du point O. La section de Φ_1 par une hypersurface V_5^4 du quatrième ordre contenant le cône D_1 est complétée par une surface F d'ordre quatorze, dont les sections hyperplanes C ont le genre quinze. Comme dans le premier cas, on démontre que ces courbes sont les courbes canoniques de F.

3. Nous nous proposons de démontrer que la surface F (dans les trois cas) est normale, c'est-à-dire que le système de ses sections hyperplanes est le système canonique complet. Il suffira de démontrer qu'il ne peut exister, sur la surface F, une courbe $\overline{C}$ d'ordre $n(2n+3)$, de genre $(n+1)(2n+1)$, n'appartenant pas à un hyperplan.

Supposons que la courbe $\overline{C}$ existe. Observons que les hyperquadriques linéairement indépendantes de $S_{\rho-1}$ contenant $\overline{C}$, contiennent F et par suite Φ, et inversement. Le nombre de ces hyperquadriques est donc égal à

$$\frac{1}{8}(n-1)\,n(n+1)\,(n+6),$$

nombre d'hyperquadriques linéairement indépendantes de S_ρ contenant Φ.

Le nombre d'hyperquadriques linéairement indépendantes de $S_{\rho+1}$ est égal à

$$\frac{1}{8}(n^2+3n+4)\,(n^2+3n+6).$$

Dans l'hypothèse où la série canonique complète de la courbe $\overline{C}$ est découpée par les hyperquadriques, il existe

$$\frac{1}{8}(n^4+6n^3+3n^2+6n+16),$$

hyperquadriques linéairement indépendantes, passant par $\overline{C}$ et par suite par Φ_1. Or, ce nombre est, quel que soit n, toujours supérieur à celui qui a été trouvé plus haut; nous parvenons donc à une absurdité et la surface F est donc normale.

Nous avons fait observer, d'autre part, que la série canonique d'une courbe C était complètement découpée par les hyperquadriques de l'espace S_ρ contenant cette courbe, donc par celles de $S_{\rho+1}$ contenant F. Il en résulte que la surface F est régulière.

Dans un espace linéaire à six dimensions, un cône projetant une surface de Veronese et une hypersurface du quatrième ordre ayant en commun un cône de second ordre se rencontrent encore suivant une surface du quatorzième ordre, projectivement canonique, de genres $p^{(1)}=15$, $p_a=p_g=7$.

Dans un espace linéaire à $\frac{1}{2}(n+1)(n+2)$ *dimensions* $(n>2)$, *un cône projetant une surface représentant les courbes d'ordre* n *d'un plan et une hypersurface cubique ayant en commun un cône d'ordre* $n(n-3)$, *se rencontrent encore suivant une surface d'ordre* $n(2n+3)$ *projectivement canonique, de genres* $p^{(1)}=(n+1)(2n+1)$, $p_a=p_g=\frac{1}{2}(n+1)(n+2)+1$.

Liége, le 14 juin 1939.

M. HAYEZ, Impr. de l'Académie royale, 112, rue de Louvain, Bruxelles
(Domicile légal : rue de la Chancellerie, 4)