EXTRAIT DU *Bulletin de la Société royale des Sciences de Liége*,
Séance du 28 juin 1945. — N° 6-7.

Sur la construction de surfaces algébriques triples,

par LUCIEN GODEAUX, Membre de la Société.

(*Seconde note.*)

Dans notre première note (¹), nous avons indiqué un procédé de construction de surfaces algébriques triples, de l'espace ordinaire, ayant un nombre fini de points de diramation. Dans la note actuelle, nous en indiquerons un second. Soit Φ une surface de l'espace ordinaire image d'une involution cyclique de période trois appartenant à une surface algébrique et n'ayant qu'un nombre fini de points unis. Nous supposons que ces points unis sont non parfaits, les points de diramation correspondants de la surface Φ étant par conséquent des points doubles biplanaires ordinaires. Effectuons sur Φ une transformation rationnelle, par exemple en remplaçant les coordonnées d'un point par des polynomes linéairement indépendants, homogènes et de même degré par rapport aux coordonnées. Nous obtenons une nouvelle surface Φ' qui possède un nombre fini de points doubles biplanaires ordinaires. A une surface osculant Φ en tout point d'intersection correspond une surface osculant Φ' en tout point d'intersection. Il en résulte que Φ' est à son tour l'image d'une involution cyclique du troisième ordre, n'ayant qu'un nombre fini de points unis non parfaits appartenant à une surface algébrique. Nous ne développons pas, d'ailleurs, cette idée dans toute sa généralité, mais sur un exemple particulier, pour plus de simplicité dans l'exposition.

Observons que dans les deux notes consacrées à la construction de surfaces triples, nous avons supposé que les involutions considérées n'avaient que des points unis non parfaits. Nos raisonnements peuvent s'étendre sans difficulté au cas où il y a également des points unis parfaits. Dans ce cas, les points de diramation correspondants sont des points triples à cône tangent rationnel.

1. Rappelons que l'involution du troisième ordre, engendrée dans un plan σ par l'homographie

$$x'_1 : x'_2 : x'_3 = x_1 : \varepsilon x_2 : \varepsilon^2 x_3,$$

(¹) *Bull. de la Soc. roy. des Sc. de Liége*, 1945, pp. 259-268.

où ε est une racine cubique primitive de l'unité, est représentée par la surface cubique

$$X_1 X_2 X_3 = X_4^3. \tag{1}$$

On a posé

$$X_1 : X_2 : X_3 : X_4 = x_1^3 : x_2^3 : x_3^3 : x_1 x_2 x_3.$$

La surface (1) possède trois points de diramation $O_1(1, 0, 0, 0)$, $O_2(0, 1, 0, 0)$, $O_3(0, 0, 1, 0)$, qui sont des points doubles biplanaires ordinaires.

Il existe, sur la surface (1), deux réseaux de cubiques gauches, homaloïdaux; le long de chacune de ces cubiques gauches, il y a une surface cubique osculatrice à la surface (1). Les équations des deux familles de surfaces cubiques ainsi obtenues sont

$$\left.\begin{aligned} &\lambda_1^3 X_1^2 X_2 + \lambda_2^3 X_2^2 X_3 + \lambda_3^3 X_3^2 X_1 \\ &+ 3(\lambda_1^2\lambda_2 X_1 X_2 + \lambda_2^2 \lambda_3 X_2 X_3 + \lambda_3^2 \lambda_1 X_3 X_1) X_4 \\ &+ 3(\lambda_1^2 \lambda_3 X_1 + \lambda_2^2 \lambda_1 X_2 + \lambda_3^2 \lambda_2 X_3) X_4^2 + 6\lambda_1\lambda_2\lambda_3 X_4^3 = 0, \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

$$\left.\begin{aligned} &\lambda_1^3 X_1^2 X_3 + \lambda_2^3 X_2^2 X_1 + \lambda_3^3 X_3^2 X_2 + \\ &+ 3(\lambda_1^2\lambda_3 X_1 X_3 + \lambda_2^2 \lambda_1 X_2 X_1 + \lambda_3^2 \lambda_2 X_3 X_2) X_4 \\ &+ 3(\lambda_1^2 \lambda_2 X_1 + \lambda_2^2 \lambda_3 X_2 + \lambda_3^2 \lambda_1 X_3) X_4^2 + 6\lambda_1\lambda_2\lambda_3 X_4^3 = 0. \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

Les cubiques gauches des deux familles passent par les points O_1, O_2, O_3.

Les plans $X_1=0$, $X_2=0$, $X_3=0$ ont un contact du second ordre avec la surface (1) le long respectivement des droites O_2O_3, O_3O_1, O_1O_2.

2. Soient

$$\varphi_1(X_1, X_2, X_3, X_4) = 0, \ \varphi_2 = 0, \varphi_3 = 0, \varphi_4 = 0$$

quatre quadriques linéairement indépendantes, sans point commun. Supposons en outre que trois quelconques de ces quadriques se rencontrent en huit points distincts.

Considérons la surface Φ, d'équation

$$\varphi_1 \varphi_2 \varphi_3 - \varphi_4^3 = 0.$$

Cette surface possède 24 points doubles biplanaires ordinaires :

a) Les 8 points communs aux quadriques $\varphi_2=0$, $\varphi_3=0$, $\varphi_4=0$, que nous désignerons par O_{11}, O_{12}, ..., O_{18}. En un de ces points, les plans tangents à la surface sont les plans tangents aux quadriques $\varphi_2=0$, $\varphi_3=0$. Chacun de ces points est équivalent à deux courbes rationnelles de degré -2. Nous désignerons par γ_{1i2}, γ_{1i3} les courbes équivalentes au point O_{1i}, la courbe γ_{1i2} correspondant aux points infiniment voisins de O_{1i} situés dans le plan tangent à la quadrique $\varphi_2=0$, la courbe γ_{1i3} aux points situés dans le plan tangent à $\varphi_3=0$.

b) Les 8 points communs aux quadriques $\varphi_3=0$, $\varphi_1=0$, $\varphi_4=0$; ils seront désignés par $O_{21}, O_{22}, \ldots, O_{28}$. Le point O_{2i} équivaut à deux courbes rationnelles γ_{2i3}, γ_{2i1} dont on obtiendra la signification par analogie avec les courbes précédemment définies.

c) Les 8 points $O_{31}, O_{32}, \ldots, O_{38}$ communs aux quadriques $\varphi_1=0$, $\varphi_2=0$, $\varphi_4=0$. Le point O_{3i} est équivalent à deux courbes rationnelles γ_{3i1}, γ_{3i2}.

La surface du sixième ordre

$$\left.\begin{aligned} &\lambda_1^3\varphi_1^2\varphi_2+\lambda_2^3\varphi_2^2\varphi_3+\lambda_3^3\varphi_3^2\varphi_1\\ &+3(\lambda_1^2\lambda_2\varphi_1\varphi_2+\lambda_2^2\lambda_3\varphi_2\varphi_9+\lambda_3^2\lambda_1\varphi_3\varphi_1)\varphi_4\\ &+3(\lambda_1^2\lambda_3\varphi_1+\lambda_2^2\lambda_1\varphi_2+\lambda_3^2\lambda_2\varphi_3)\varphi_4^2+6\lambda_1\lambda_2\lambda_3\varphi_4^3=0\end{aligned}\right\}\quad(4)$$

oscule la surface Φ le long d'une courbe du douzième ordre passant par les 24 points doubles biplanaires de cette surface.

D'après le théorème que nous avons rappelé au début de notre seconde note, l'existence des 24 points doubles biplanaires de Φ et celle de la surface (4) sont suffisantes pour que Φ soit l'image d'une involution cyclique I_3, d'ordre trois, appartenant à une surface F et possédant 24 points unis non parfaits.

La surface Φ étant du sixième ordre et ne possédant que des points doubles, ses genres arithmétique et linéaire sont $p_a=10$, $p^{(1)}=25$. Par suite les genres arithmétique et linéaire de F ont pour valeurs $p_a=16$, $p^{(1)}=73$.

Désignons par Γ les sections planes de la surface Φ et par Γ_{11} la courbe le long de laquelle la surface (4) oscule la surface Φ. Nous avons

$$6\Gamma\equiv 3\Gamma_{11}+2\Sigma(\gamma_{1i2}+\gamma_{2i3}+\gamma_{3i1})+\Sigma(\gamma_{1i3}+\gamma_{2i1}+\gamma_{3i2}),$$
$$(i=1,2,\ldots,8).$$

En effet, au point O_{11}, par exemple, la courbe Γ_{11} est tracée sur la nappe de la surface Φ tangente à la quadrique $\varphi_2=0$, c'est-à-dire coupe en un point la courbe γ_{112}, mais ne rencontre pas la courbe γ_{113}.

3. La quadrique $\varphi_1=0$ oscule la surface Φ le long de la biquadratique gauche

$$\varphi_1=0,\ \varphi_4=0,$$

que nous désignerons par Δ_1. Cette courbe coupe en un point les courbes γ_{2i_1}, γ_{3i_1}, mais ne rencontre pas les autres courbes γ. On a donc

$$2\Gamma \equiv 3\Delta_1 + 2\Sigma(\gamma_{2i1} + \gamma_{3i1}) + \Sigma(\gamma_{2i3} + \gamma_{3i2}).$$

De même, les quadriques $\varphi_2 = 0$, $\varphi_3 = 0$ osculent Φ le long de biquadratiques gauches Δ_2, Δ_3 dont les équations sont respectivement $\varphi_2 = \varphi_4 = 0$, $\varphi_3 = \varphi_4 = 0$. Ces courbes satisfont aux relations fonctionnelles

$$2\Gamma \equiv 3\Delta_2 + 2\Sigma(\gamma_{3i2} + \gamma_{1i2}) + \Sigma(\gamma_{3i1} + \gamma_{1i3}),$$
$$2\Gamma \equiv 3\Delta_3 + 2\Sigma(\gamma_{1i3} + \gamma_{2i3}) + \Sigma(\gamma_{1i2} + \gamma_{2i1}).$$

En considérant la section de Φ par la quadrique $\varphi_4 = 0$, on obtient

$$2\Gamma \equiv \Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3 + \Sigma(\gamma_{1i2} + \gamma_{1i3} + \gamma_{2i3} + \gamma_{2i1} + \gamma_{3i1} + \gamma_{3i2}).$$

D'autre part, on trouve facilement, en comparant les relations fonctionnelles précédentes,

$$\Gamma_{11} \equiv 2\Delta_1 + \Delta_2 + \Sigma(\gamma_{2i1} + \gamma_{3i1} + \lambda_{3i2}),$$
$$\Gamma_{11} \equiv 2\Delta_2 + \Delta_3 + \Sigma(\gamma_{1i2} + \gamma_{1i3} + \lambda_{3i2}),$$
$$\Gamma_{11} \equiv 2\Delta_3 + \Delta_1 + \Sigma(\gamma_{1i3} + \gamma_{2i3} + \lambda_{2i1}).$$

Les surfaces du sixième ordre

$$\lambda_1^3\varphi_1^2\varphi_3 + \lambda_2^3\varphi_2^2\varphi_1 + \lambda_3^3\varphi_1^2\varphi_2 + 3(\lambda_1^2\lambda_3\varphi_1\varphi_3 + \lambda_2^2\lambda_1\varphi_2\varphi_1 + \lambda_3^2\lambda_2\varphi_3\varphi_2)\varphi_4$$
$$+ 3(\lambda_1^2\lambda_2\varphi_1 + \lambda_2^2\lambda_3\varphi_2 + \lambda_3^2\lambda_1\varphi_3)\varphi_4^2 + 6\lambda_1\lambda_2\lambda_3\varphi_4^3 = 0$$

osculent la surface Φ le long d'une courbe du douzième ordre Γ_{12}, satisfaisant à la relation fonctionnelle

$$6\Gamma \equiv 3\Gamma_{12} + 2\Sigma(\gamma_{1i3} + \gamma_{2i1} + \gamma_{3i2}) + \Sigma(\gamma_{1i2} + \gamma_{2i3} + \gamma_{3i1}).$$

On a

$$\Gamma_{12} \equiv 2\Delta_1 + \Delta_3 + \Sigma(\gamma_{2i3} + \gamma_{2i1} + \gamma_{3i1}),$$
$$\Gamma_{12} \equiv 2\Delta_2 + \Delta_1 + \Sigma(\gamma_{3i1} + \gamma_{3i2} + \gamma_{1i2}),$$
$$\Gamma_{12} \equiv 2\Delta_3 + \Delta_2 + \Sigma(\gamma_{1i2} + \gamma_{1i3} + \gamma_{2i3}).$$

4. La courbe Δ_1 est elliptique et passe par 16 points unis; il lui correspond sur F une courbe D_1 de genre 17. De même, aux courbes Δ_2, Δ_3 correspondent sur F des courbes D_2, D_3 de genre 17. Les courbes D_1, D_2, D_3 se rencontrent deux à deux en des groupes de 8 points qui sont les points unis de l'involution I_3.
des groupes de 8 points qui sont les points unis de l'invilution I_3.

A une section plane Γ de Φ, courbe qui est de genre dix, correspond sur F une courbe C de genre 28, appartenant à un système complet $|C|$ de degré 18.

Supposons que le système $|C|$ puisse contenir des courbes appartenant à l'involution I_3 et qui ne soient pas des transformées de courbes Γ. Soit C_1 une de ces courbes; elle passe nécessairement par les 24 points unis de l'involution I_3 en y touchant, en chacun de ces points, une des directions unies, c'est-à-dire une des courbes D_1, D_2 ou D_3 ([1]). A la courbe C_1 correspond, sur Φ, une sextique Γ_1, de genre deux, le long de laquelle une surface cubique oscule la surface Φ.

La première polaire d'un point arbitraire P par rapport à Φ coupe Γ_1 aux 24 points biplanaires de cette surface et en 6 autres points; par conséquent, les plans tangents à Φ aux points de Γ_1 enveloppent une développable de classe six. La première polaire de P par rapport à la surface cubique osculant Φ le long de Γ_1 coupe cette courbe en 12 points dont six doivent être doubles biplanaires pour cette surface cubique, ce qui est impossible. On en conclut que le système complet $|C|$ est le transformé de $|\Gamma|$ et a donc la dimension égale à trois.

Aux courbes 2Γ, c'est-à-dire aux courbes canoniques de Φ, correspondent sur F des courbes du système canonique $|2C|$ de cette surface. Le système $|2C|$ a le genre 73, le degré 72 et la dimension $p_g - 1 \geqslant 15$. Il en résulte que $|2C|$ est plus ample que $|2\Gamma|$ et contient, par conséquent, un ou deux systèmes linéaires partiels, appartenant à l'involution I_3 et dont les courbes ne sont pas des transformées des courbes 2Γ.

Effectivement, aux courbes Γ_{11}, Γ_{12} correspondent sur F des courbes C_{11}, C_{12} et les relations fonctionnelles liant Γ_{11}, Γ_{12} aux courbes Γ donnent, sur F,

$$2\,C \equiv C_{11} \equiv C_{12}.$$

Soient r_1, r_2 les dimensions respectives des systèmes $|C_{11}|$, $|C_{12}|$ c'est-à-dire des systèmes $|\Gamma_{11}|$, $|\Gamma_{12}|$. Le système $|2\Gamma|$ ayant la dimension 9 et la transformation birationnelle de F en soi génératrice de I_3 opérant sur les courbes de $|2C|$ comme une homographie sur les points d'un espace à $p_g - 1$ dimensions, on a

$$r_1 + r_2 + 12 = p_g.$$

On a d'ailleurs $r_1 \geqslant 2$, $r_2 \geqslant 2$.

([2]) Pour préciser, soit O le point uni de I_3 qui correspond au point O_{11} de Φ, par exemple. Le point O appartient à D_2, D_3. Dans son domaine du premier ordre, I_3 détermine une involution cyclique binaire d'ordre trois, ayant deux points unis, situés l'un sur D_2, l'autre sur D_3. Ce sont des points unis parfaits qui correspondent respectivement aux courbes γ_{112}, γ_{113}.

Les courbes Γ_{11}, Γ_{12} sont de genre 17 et les systèmes $|\Gamma_{11}|$, $|\Gamma_{12}|$ de degré 8.

Les courbes Γ_{11}, par exemple, découpent, sur une courbe Γ, une série linéaire d'ordre 12 qui peut être spéciale. Si cette série est spéciale, son indice de spécialité est d'ailleurs égal à l'unité, car les adjointes de Γ sont des cubiques et un groupe de 12 points de Γ ne peut appartenir qu'à une cubique au plus. Supposons la série spéciale. Il en résulte qu'une courbe Γ_{11} appartient aux adjointes de $|\Gamma|$ sur Φ, c'est-à-dire appartient à une surface cubique. Celle-ci coupe encore Φ suivant une sextique K, satisfaisant à l'équation fonctionnelle

$$3\,\Gamma \equiv K + \Gamma_{11} + \Sigma\,(\gamma_{1i2} + \gamma_{1i3} + \gamma_{2i3} + \gamma_{2i1} + \gamma_{3i1} + \gamma_{3i2}).$$

Multiplions les deux membres de cette relation par 3 et tenons compte de la relation liant Γ et Γ_{11}. Nous obtenons

$$3\,\Gamma \equiv 3\,K + 2\,\Sigma\,(\gamma_{1i3} + \gamma_{2i1} + \gamma_{3i2}) + \Sigma\,(\gamma_{1i2} + \gamma_{2i3} + \gamma_{3i1}).$$

A la courbe K correspond par suite sur F une courbe K′ appartenant au système $|C|$. Mais alors, K serait une courbe Γ, ce qui est absurde. En effet, la surface cubique passant par Γ_{11} devrait alors dégénérer en un plan et une quadrique contenant Γ_{11}.

Les courbes Γ_{11} découpent donc sur une courbe Γ une série linéaire g^2_{12} non spéciale, et comme une courbe Γ_{11} ne peut contenir une courbe Γ comme partie, on a $r_1 = 2$. Pour la même raison, on a $r_2 = 2$ et par suite $p_g = 16$.

La surface F est régulière.

5. Revenons aux courbes D_1, D_2, D_3. Les relations liant les courbes Δ_1, Δ_2, Δ_3 aux courbes Γ, Γ_{11}, Γ_{12} donnent, sur F,

$$D_1 + D_2 + D_3 \equiv 2\,C,$$
$$C_{11} \equiv 2\,D_1 + D_2 \equiv 2\,D_2 + D_3 \equiv 2\,D_3 + D_1 \equiv 2\,C,$$
$$C_{12} \equiv 2\,D_1 + D_3 \equiv 2\,D_2 + D_1 \equiv 2\,D_3 + D_2 \equiv 2\,C.$$

On en déduit

$$D_1 \equiv D_2 \equiv D_3.$$

Les courbes D_1, D_2, D_3 appartiennent donc à un système linéaire $|D|$. Ce système est un réseau, car il ne peut contenir que les courbes D_1, D_2, D_3 appartenant à I_3.

On a, d'autre part,

$$3\,D \equiv 2\,C.$$

6. Rapportons projectivement les courbes du système canonique $|2C|$ de F aux hyperplans d'un espace linéaire S_{15} à 15 dimensions. A la surface F correspond une surface que nous continuerons à désigner par F, sur laquelle l'involution I_3 est engendrée par une homographie H de S_{15}.

L'homographie H possède trois axes ponctuels σ_0, σ_1, σ_2 et les hyperplans passant par deux de ces axes découpent sur F les systèmes appartenant à I_3 et contenues dans $|2C|$. Supposons que les hyperplans passant par σ_1, σ_2 découpent sur F le transformé de $|2C|$, que ceux qui passent par σ_0, σ_2 découpent le système $|C_{11}|$, enfin que les hyperplans passant par σ_0, σ_1 découpent sur F le système $|C_{12}|$. Dans ces conditions, σ_0 est un espace linéaire à 9 dimensions, coupant F aux 24 points unis de I_3; σ_1, σ_2 sont des plans ne rencontrant pas F.

Sur la surface F qui vient d'être construite, la courbe D_1 est d'ordre 24. Observons que par A_i passent ∞^1 courbes 2Γ, ∞^1 courbes Γ_{11} et ∞^1 courbes Γ_{12}; par conséquent, la courbe D_1 appartient à six hyperplans linéairement indépendants : deux passant par σ_1, σ_2; deux par σ_0, σ_1 et deux par σ_0, σ_2. Il en résulte que D_1 appartient à un espace à neuf dimensions, que nous désignerons par δ_1, s'appuyant en un point P_{11} sur σ_1, en un point P_{12} sur σ_2 et coupant σ_0 suivant un espace S_7 à 7 dimensions.

De même, D_2 appartient à un espace δ_2 à 9 dimensions, s'appuyant sur σ_1 en un point P_{21}, sur σ_2 en un point P_{22} et coupant σ_0 suivant un espace à 7 dimensions. Enfin, D_3 appartient à un espace δ_3 à 9 dimensions, rencontrant σ_1 en un point P_{31}, σ_2 en un point P_{32}, σ_0 suivant un espace linéaire à 7 dimensions.

Nous avons désigné par O_{1i}, O_{2i}, O_{3i} les points de diramation de Φ. Désignons par O'_{1i}, O'_{2i}, O'_{3i} les points unis de I_3 qui correspondent respectivement à ces points.

Les huit points O_{11}, O_{12}, ..., O_{18} appartiennent à ∞^2 quadriques et aux courbes Γ_{11}, Γ_{12}; par conséquent les huit points O'_{11}, O'_{12}, ..., O'_{18} appartiennent à 9 hyperplans linéairement indépendants; ils sont donc situés dans un espace linéaire à 6 dimensions. D'autre part, ils appartiennent à σ_0 et aux courbes D_2, D_3. On voit donc que les espaces à 7 dimensions (σ_0, δ_2), (σ_0, δ_3) ont en commun un espace à six dimensions. De même, (σ_0, δ_3), (σ_0, δ_1) ont en commun un espace à 6 dimensions, contenant les points O'_{21}, O'_{22}, ..., O'_{28}, et les espaces (σ_0, δ_1), (σ_0, δ_2) ont en commun un espace à 6 dimensions contenant les points

O'_{31}, O'_{32}, ..., O'_{38}. D'ailleurs, la courbe $D_1+D_2+D_3$ étant une section hyperplane de F, les espaces (σ_0, δ_1), (σ_0, δ_2), (σ_0, δ_3) appartiennent à un espace linéaire à 8 dimensions.

Le plan tangent à F au point O'_{1i} s'appuie en un point sur chacun des plans σ_1, σ_2. Il contient les tangentes en O'_{1i} aux courbes D_2, D_3. Observons, d'autre part, que les courbes C_{11} touchent D_2 en O'_{1i} et que les courbes C_{12} touchent D_3 au même point. On en conclut que D_2 a pour tangente en O'_{1i} la droite $O'_{1i}P_{22}$ et D_3 la droite $O'_{1i}P_{31}$. De même, en un point O'_{2i}, D_3 a pour tangente la droite $O'_{2i}P_{32}$, et D_1 la droite $O'_{2i}P_{11}$. En O'_{3i}, D_1 a pour tangente la droite $O'_{3i}P_{12}$, et D_2 la droite $O'_{3i}P_{21}$.

Sur la surface F les courbes D appartiennent à des espaces à neuf dimensions et se rencontrent deux à deux en des groupes de 8 points appartenant à des espaces à six dimensions.

La surface F est évidemment d'ordre 72 et est une surface projectivement canonique.

7. Nous avons supposé, dans ce qui précède, que les quadriques $\varphi_1=0$, $\varphi_2=0$, $\varphi_3=0$, $\varphi_4=0$ n'avaient aucun point commun. Abandonnons cette hypothèse et supposons que ces quadriques aient en commun le point O_4 (0, 0, 0, 1). Nous poserons

$$\varphi\,(X_1, X_2, X_3, X_4) \equiv X_4\,\alpha_{i1}(X_1, X_2, X_3) + \alpha_{i2}(X_1, X_2, X_3),$$

où α_{i1} est linéaire, α_{i2} quadratique en X_1, X_2, X_3.

Si nous ordonnons l'équation de Φ par rapport aux puissances décroissantes de X_4, le premier terme est

$$X_4^3\,(\alpha_{11}\,\alpha_{21}\,\alpha_{31} - \alpha_{41}^3),$$

de sorte que O_4 est triple pour la surface Φ, le cône tangent étant en général elliptique. Outre ce point triple, la surface Φ possède 21 points doubles biplanaires ordinaires.

La surface du sixième ordre (4) possède également un point triple en O_4. Le cône tangent à cette surface en ce point a pour équation celle qu'on obtient en remplaçant dans (4), φ_i par α_{i1}. La surface (4) oscule Φ en chaque point d'une courbe que nous continuerons à appeler Γ_{11} et qui a un point triple en O_4.

Les courbes Γ_{12} ont également un point triple en O_4. Les courbes Δ_1, Δ_2, Δ_3 passent simplement par ce point.

Actuellement, les quadriques adjointes à Φ passent simplement par O_4 et la surface a les genres $p_a=p_g=9$, $p^{(1)}=22$.

L'existence de 21 points doubles biplanaires ordinaires sur Φ et celle de la surface (4) permettent de déduire que Φ représente encore actuellement une involution cyclique I_3 d'ordre trois, appartenant à une surface F dont les genres sont maintenant $p_a = 15$, $p^{(1)} = 64$.

On démontre, comme dans le cas précédent, que sur la surface F le système $|2\,C|$, qui n'est plus le système canonique de la surface, a encore la dimension 15. Actuellement, la surface F rencontre l'axe σ_0 de H en 21 points, unis pour l'involution I_3.

Le point O_4 n'appartient pas en général aux courbes $2\,\Gamma$ et, d'autre part, il est triple pour les courbes Γ_{11}, Γ_{12}; donc à O_4 correspond sur F un point (ou un groupe de points) triple pour les courbes C_{11}, C_{12}, appartenant par conséquent à l'espace σ_0. Le point qui correspond à O_4 sur F est donc unique et triple pour cette surface. Désignons-le par O'_4. Le système canonique de F est formé par les sections hyperplanes passant par σ_1, σ_2 et O'_4; on a donc $p_g = 15$ et la surface est régulière.

Le point O'_4 est équivalent à une courbe elliptique de degré -3, transformée en elle-même par H et sur laquelle cette homographie engendre une involution elliptique d'ordre trois, privée de point uni. L'image de cette involution est la courbe elliptique de degré -3, équivalente au point triple O_4 de Φ.

On peut supposer plus généralement que les quadriques $\varphi_1 = 0, \ldots, \varphi_4 = 0$ ont en commun k points simples ($k \leqslant 6$). Le raisonnement précédent conduit dans ce cas à une surface F, de genres $p_a = p_g = 16 - k$, $p^{(1)} = 73 - 9\,k$.

Liége, le 21 mai 1945.

M. HAYEZ, Impr. de l'Académie royale, 112, rue de Louvain, Bruxelles
(Domicile légal : rue de la Chancellerie, 4)