Extrait du *Bulletin de la Société royale des Sciences de Liége*
Séance du 19 octobre 1944. — Nos 8 à 10.

Sur une surface du quatrième ordre possédant dix points doubles,

par LUCIEN GODEAUX, Membre de la Société.

Étant donnés cinq plans dans l'espace, il existe ∞^4 surfaces du quatrième ordre passant par les dix droites communes à ces cinq plans pris deux à deux. Ces surfaces ont des points doubles aux points communs à ces plans pris trois à trois. Nous montrons qu'une telle surface contient un système linéaire ∞^3 de sextiques gauches de genre trois passant par les dix points doubles. On peut transformer birationnellement la surface en une autre surface du quatrième ordre dont les sections planes correspondent aux sextiques et qui possède dix points doubles correspondant aux droites de la surface primitive, dix droites correspondant aux points doubles de la surface primitive, un système linéaire ∞^3 de sextiques gauches correspondant aux sections planes de la surface primitive. Les deux surfaces sont analogues au point de vue projectif et il nous a paru intéressant de l'établir.

Ajoutons cette propriété : Le long d'une sextique de genre trois tracée sur une des surfaces, il existe une surface cubique inscrite dans la surface.

1. Soient α_0, α_1, α_2, α_3, α_4 cinq plans dont quatre ne passent jamais par un même point. Désignons par a_{ik} la droite commune aux plans α_i, α_k et par A_{ik} le point commun aux trois plans distincts de α_i, α_k. Dans ces conditions, un point A_{ik} appartient à une droite a_{jh} lorsque les indices i, k, j, h sont tous différents.

On peut grouper les cinq plans α_0, α_1, ..., α_4 quatre à quatre de cinq manières et chaque groupement peut être considéré comme une surface du quatrième ordre passant simplement par les dix droites a_{ik} (et doublement par les dix points A_{ik}). On obtient ainsi cinq surfaces du quatrième ordre linéairement indépendantes et, par conséquent, les surfaces du quatrième ordre F passant par les dix droites a_{ik} forment un système linéaire $|F|$ de dimension $r \geqslant 4$.

Supposons $r > 4$. Les surfaces F passant pas un point du plan α_0 n'appartenant pas à une des droites a_{01}, a_{02}, a_{03}, a_{04}, contiennent ce plan comme partie et sont complétées par ∞^{r-1} surfaces cubiques passant par les droites a_{12}, a_{13}, ..., a_{34}, c'est-à-dire par les arêtes du tétraèdre de sommets A_{01}, A_{02}, A_{03}, A_{04}. Ces surfaces sont en nombre ∞^3 et l'on a donc $r-1=3$, contrairement à l'hypothèse.

Les surfaces F du quatrième ordre passant par les dix droites a_{ik} forment donc un système linéaire $|F|$ de dimension quatre.

Ces surfaces ont des points doubles aux dix points A_{ik} et sont en général de genres un ($p_a = P_4 = 1$).

2. Considérons une surface F irréductible, de genres un, et désignons par C ses sections planes. Soient en particulier C_0, C_1, C_2, C_3, C_4 les sections de F par les plans α_0, α_1, α_2, α_3, α_4.

Chacun des points doubles A_{ik} est équivalent, au point de vue des transformations birationnelles, à une courbe rationnelle de degré -2 que nous désignerons par le même symbole A_{ik}.

Chacune des droites a_{ik} est une courbe rationnelle de degré —2 que nous désignerons par le même symbole a_{ik}.

Nous avons les relations fonctionnelles

$$C_0 \equiv a_{01} + a_{02} + a_{03} + a_{04} + A_{12} + A_{13} + A_{14} + A_{23} + A_{24} + A_{34},$$
$$C_1 \equiv a_{01} + a_{12} + a_{13} + a_{14} + A_{02} + A_{03} + A_{04} + A_{23} + A_{24} + A_{34},$$
$$C_2 \equiv a_{02} + a_{12} + a_{23} + a_{24} + A_{01} + A_{03} + A_{04} + A_{13} + A_{14} + A_{34},$$
$$C_3 \equiv a_{03} + a_{13} + a_{23} + a_{34} + A_{01} + A_{02} + A_{04} + A_{12} + A_{14} + A_{24},$$
$$C_4 \equiv a_{04} + a_{14} + a_{24} + a_{34} + A_{01} + A_{02} + A_{03} + A_{12} + A_{13} + A_{23}.$$

Désignons par K la courbe commune à deux surfaces F en dehors des droites a_{ik}. Sur une surface F, nous avons

$$K \equiv 4\,C - \Sigma\, a_{ik} - 2\,\Sigma\, A_{ik},$$

les sommations s'étendant aux dix droites a_{ik} et aux dix points A_{ik}.

En représentant par [X, Y] le nombre de points communs à deux courbes X, Y, on a

$$[K, C] = 6, \quad [K, a_{ik}] = 0, \quad [K, A_{ik}] = 1, \quad [K, K] = 4.$$

Les courbes K sont des sextiques de genre trois, passant par les dix points A_{ik} et le système |F| a le degré quatre.

3. On peut arriver à ce résultat par une autre voie.

Soient

$$\varphi_0(x_1, x_2, x_3, x_4) = 0, \quad \varphi_1 = 0, \ldots, \varphi_4 = 0$$

les équations des plans $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_4$. L'équation d'une surface F s'écrit

$$\lambda_0\varphi_1\varphi_2\varphi_3\varphi_4 + \lambda_1\varphi_2\varphi_3\varphi_4\varphi_0 + \lambda_2\varphi_3\varphi_4\varphi_0\varphi_1 + \lambda_3\varphi_4\varphi_0\varphi_1\varphi_2 + \lambda_4\varphi_0\varphi_1\varphi_2\varphi_3 = 0.$$

Rapportons projectivement ces surfaces aux hyperplans

$$\lambda_0 X_0 + \lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2 + \lambda_3 X_3 + \lambda_4 X_4 = 0$$

d'un espace linéaire S_4 à quatre dimensions.

Aux points de l'espace correspondent ceux d'une variété à trois dimensions, V_3^4, d'ordre quatre, dont l'équation peut s'écrire

$$\Delta_0 X_1 X_2 X_3 X_4 + \Delta_1 X_2 X_3 X_4 X_0 + \Delta_2 X_3 X_4 X_0 X_1 + \Delta_3 X_4 X_0 X_1 X_2 + \\ + \Delta_4 X_0 X_1 X_2 X_3 = 0,$$

où Δ_i est le déterminant des coefficients des quatre polynomes tirés de $\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_4$ obtenus en retirant φ_i.

4. Considérons une droite

$$\varphi_2 : \varphi_3 : \varphi_4 = \mu_2 : \mu_3 : \mu_4$$

passant par A_{01}. Les surfaces F touchant cette droite en ce point sont données par

$$\lambda_2 \mu_3 \mu_4 + \lambda_3 \mu_4 \mu_2 + \lambda_4 \mu_2 \mu_3 = 0.$$

Par conséquent, au point infiniment voisin de A_{01} sur la droite considérée correspond sur V_3^4 le point

$$X_0 = 0, \quad X_1 = 0, \quad X_2 : X_3 : X_4 = \mu_3\mu_4 : \mu_4\mu_2 : \mu_2\mu_3.$$

Par suite, au domaine de A_{01} correspond sur V_3^4 le plan α'_{01} d'équations

$$X_0 = X_1 = 0.$$

Plus généralement, au domaine de A_{ik} correspond le plan α'_{ik} donné par

$$X_i = X_k = 0.$$

D'autre part, les surfaces F touchant en un point de la droite a_{01} le plan

$$\mu_0\varphi_0 + \mu_1\varphi_1 = 0$$

touchent ce plan en tout point de cette droite. Aux points infiniment voisins de la droite a_{01} situés dans ce plan correspond sur V_3^4 le point

$$\mu_1 X_0 + \mu_0 X_1 = 0, \quad X_2 = X_3 = X_4 = 0,$$

dont le lieu est la droite $X_2 = X_3 = X_4 = 0$. Aux points infiniment voisins de a_{01} correspondent donc les points de la droite a''_{01} donnée par

$$X_2 = X_3 = X_4 = 0.$$

Plus généralement, aux points infiniment voisins de la droite a_{ik} correspondent les points de la droite a''_{ik} dont les équations s'obtiennent en annulant les X dont l'indice diffère de i et de k.

A une surface F correspond sur V_3^4 une surface F', section hyperplane de cette variété. La surface F' est du quatrième ordre, passe par dix droites a'_{ik} appartenant aux plans α'_{ik} et possède dix points doubles A'_{ik} appartenant aux droites a''_{ik}.

La surface F′ est du même type que F, mais aux points A_{ik} correspondent les droites a'_{ik} et aux droites a_{ik} correspondent les points A'_{ik}. Les sections planes de F′ correspondent aux courbes K, qui sont bien de genre trois. Aux courbes C correspondent sur F′ des sextiques de genre trois passant par les points doubles A'_{ik}.

On observera que tout ceci revient à effectuer sur $V_3{}^4$ la transformation obtenue en rapportant projectivement aux hyperplans d'un espace à quatre dimensions les hypersurfaces du quatrième ordre circonscrites à la pyramide fondamentale de S_4.

5. Considérons, sur une surface F irréductible, une courbe K irréductible. Il existe ∞^3 surfaces cubiques passant par K et ces surfaces coupent encore F suivant des sextiques K′ satisfaisant à la relation fonctionnelle

$$K' \equiv 3\,C - K - \Sigma A_{ik}.$$

D'autre part, on a

$$5\,C \equiv C_0 + C_1 + \ldots + C_4 \equiv 2\,\Sigma a_{ik} + 3\,\Sigma A_{ik};$$

donc

$$K' \equiv 4\,C - \Sigma a_{ik} - 2\,\Sigma A_{ik} \equiv K.$$

Il en résulte que l'on a

$$2\,K \equiv 3\,C - \Sigma A_{ik}.$$

Par conséquent, il existe une surface cubique inscrite dans la surface F, le long de la courbe K.

Désignons par Φ cette surface. La polaire d'un point P par rapport à F passe par les dix points doubles de cette surface et coupe encore K en huit points. Par conséquent, les plans tangents à F et à Φ le long de K enveloppent une développable de classe huit. La polaire de P par rapport à Φ passe par les huit points de contact des plans tangents à Φ en des points de K, passant par P et coupe encore K en quatre points qui sont nécessairement doubles pour Φ. La surface Φ possède donc quatre points doubles sur la courbe K.

6. Les surfaces cubiques passant par K forment un système homaloïdal. Rapportons projectivement ces surfaces cubiques aux plans de l'espace. A la surface F correspond une surface F_0 du quatrième ordre.

Désignons par Δ la surface lieu des trisécantes de K. On sait que Δ est d'ordre huit, passe trois fois par K et est la surface fondamentale de la transformation birationnelle T que l'on vient de définir. Aux génératrices de Δ, T fait correspondre les points d'une courbe K_0, du sixième ordre et de genre trois, appartenant à F_0.

Aux sections planes C de F correspondent sur F_0 les sextiques découpées par les surfaces cubiques passant par K_0.

Soit Δ_0 la surface du huitième ordre, lieu des trisécantes de K_0. Cette surface passe trois fois par K_0 et ses génératrices correspondent par T aux points de la courbe K.

Aux génératrices a_{ik} de Δ correspondent des points de K_0, qui sont doubles pour F_0. En effet, à une droite passant par un de ces points, T^{-1} fait correspondre une cubique gauche formée de la droite a_{ik} correspondante et d'une conique s'appuyant en un point sur cette droite et en cinq points sur K. Cette conique ne rencontre plus F qu'en deux points, d'où la propriété énoncée.

A chacun des points A_{ik} correspond une génératrice de Δ_0 appartenant à F_0.

On voit que la surface F_0 est analogue à F; les sextiques K sont devenues les sections planes de F_0, les sections planes C de F deviennent des sextiques de F_0, les droites a_{ik} de F deviennent des points doubles de F_0 et les points doubles A_{ik} de F deviennent des droites de F_0. Les relations d'incidence sont conservées et les sextiques de F_0 passent par les dix points doubles de la surface.

La surface F_0 est d'ailleurs projectivement identique à une section hyperplane F′ de V^4_3.

7. La surface Δ est de genre trois; elle coupe F suivant les dix droites a_{ik}, suivant la courbe K comptée trois fois et suivant une quartique de genre trois, qui est nécessairement une section plane de F. On a donc

$$8\,C \equiv 3\,K + \Sigma a_{ik} + 3\,\Sigma A_{ik} + C,$$

c'est-à-dire

$$7\,C \equiv 3\,K + \Sigma a_{ik} + 3\,\Sigma A_{ik}.$$

En tenant compte des relations précédemment établies, on en déduit

$$2\,C \equiv 3\,K - \Sigma a_{ik}.$$

C'est la relation relative à la surface F_0, analogue à la relation

$$2\,K \equiv 3\,C - \Sigma A_{ik}$$

trouvée sur F.

Désignons par C^* la section plane de F appartenant à Δ. Au plan de cette courbe, T fait correspondre une surface cubique Φ_0 passant par K_0. D'autre part, C^* appartenant à Δ, aux points de cette courbe correspondent des points de F_0 infiniment voisins de K_0. Il en résulte que la surface Φ_0 est inscrite dans la surface F_0, le long de K_0.

Le plan σ de C^* coupe Δ suivant une courbe du huitième ordre, formée de la courbe C^* et d'une courbe du quatrième ordre passant doublement par les six points de rencontre de σ et de K. Cette dernière courbe se réduit donc aux côtés d'un quadrilatère; ces côtés sont des trisécantes de K et appartiennent donc à Δ. On en déduit que la surface Φ_0 possède quatre points doubles sur la courbe K_0.

A la surface Φ, T fait correspondre un plan σ_0 coupant F_0 suivant une courbe C^*_0 appartenant à Δ_0. Le plan σ_0 coupe Δ_0 suivant la courbe C^*_0 et suivant quatre génératrices de Δ_0, qui correspondent aux points doubles de Φ situés sur K.

Liége, le 4 août 1944.

M. HAYEZ, Imprimeur de l'Académie royale de Belgique, rue de Louvain, 112, Bruxelles.
(Domicile légal : rue de la Chancellerie, 4)