Extrait du *Bulletin de l'Académie royale de Belgique* (Classe des Sciences).
Séance du 8 mai 1945.

GÉOMÉTRIE ALGÉBRIQUE

Sur les involutions du septième ordre appartenant à une surface de genres un,

par LUCIEN GODEAUX,
Membre de l'Académie.

Nous avons consacré une série d'études aux involutions de genres un ($p_a = P_4 = 1$) appartenant à une surface de genres un également. Ces involutions n'ont qu'un nombre fini de points unis et sont engendrées par un groupe de transformations birationnelles de la surface en elle-même. Nos premières recherches ont porté sur les involutions d'ordre deux, trois, ou dont l'ordre n'admet comme facteurs que deux et trois (1). Nous avons ensuite démontré que les surfaces de genres un pouvaient également contenir des involutions d'ordre cinq et sept et en avons donné des exemples (2). Il ne peut d'ailleurs exister d'involution d'ordre premier supérieur à sept. Il restait à étudier les systèmes de courbes tracées sur une surface image d'une involution d'ordre cinq ou sept. Nous avons étudié le cas d'une involution d'ordre cinq (3) et dans cette note nous considérons les involutions d'ordre sept.

(1) *Mémoire sur les involutions appartenant à une surface de genres un* (ANNALES DE L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE, 1914, pp. 357-430 ; 1919, pp. 51-70). On trouvera, dans notre exposé sur *Les involutions cycliques appartenant à une surface algébrique* (Paris, Hermann, 1935), une bibliographie plus complète (p. 40, nº 12).

(2) *Sur l'ordre des correspondances rationnelles entre deux surfaces de genres un* (BULL. DE L'ACAD. ROY. DE BELGIQUE, 1935, pp. 345-353).

(3) *Sur les involutions cycliques du cinquième ordre appartenant à une surface algébrique* (BULL. DE L'ACAD. ROY. DE BELGIQUE, 1939, pp. 41-50).

Si Φ est une surface de genres un image d'une involution d'ordre sept appartenant à une surface de genres un, Φ possède trois points de diramation qui sont des points doubles biplanaires à chacun desquels sont infiniment voisins successifs deux points doubles biplanaires dont le dernier est ordinaire. Si l'on prend pour Φ une surface normale sur laquelle les points de diramation sont isolés, il existe sur cette surface six systèmes linéaires de courbes de même ordre que la surface. Nous déterminons le comportement de ces courbes aux points de diramation.

1. Soit F une surface de genres un ($p_a = P_4 = 1$) contenant une involution cyclique I_7, d'ordre sept, n'ayant qu'un nombre fini de points unis. Désignons par Φ une surface image de cette involution. La surface Φ est de genres un ($p_a = P_4 = 1$) et, si nous supposons que c'est une surface normale, elle possède des points au plus doubles.

Construisons, sur la surface F, un système linéaire complet $|C|$ satisfaisant aux conditions suivantes :

a) Il est transformé en lui-même par la transformation birationnelle T de F en soi, génératrice de l'involution I_7 ;

b) Il contient un système linéaire partiel $|C_1|$, dépourvu de points-base, appartenant à l'involution I_7.

Nous avons montré, dans nos travaux antérieurs, que cette construction était possible.

Aux courbes C_1 correspondent, sur la surface Φ, des courbes Γ_1 formant un système linéaire complet $|\Gamma_1|$, dont nous désignerons le genre par π. On peut d'ailleurs supposer π aussi grand qu'on le veut, en remplaçant éventuellement $|C|$ par un de ses multiples. Le système $|\Gamma_1|$ a le degré $2\pi - 2$ et la dimension π. En rapportant projectivement les courbes Γ_1 aux hyperplans d'un espace linéaire S_π à π dimensions, nous transformons Φ en une surface que nous désignerons toujours par Φ, normale, d'ordre $2\pi - 2$.

Les courbes C_1 et par suite les courbes C ont le genre $7\pi - 6$. Le système $|C|$ a par conséquent le degré $14(\pi - 1)$ et la dimension $7\pi - 6$. Rapportons projectivement les courbes C aux hyperplans d'un espace linéaire $S_{7\pi-6}$ à $7\pi - 6$ dimensions. Nous obtenons ainsi un modèle projectif de la surface F, d'ordre $14(\pi - 1)$, sur lequel l'involution I_7 est déterminée par une homographie de période sept de $S_{7\pi-6}$, homographie que nous désignerons toujours par T.

L'homographie T possède un certain nombre d'axes ponctuels que nous désignerons par $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_k$ $(1 < k \leqslant 7)$. Les hyperplans passant par $k - 1$ de ces axes, par exemple par $\sigma_2, \sigma_3, \ldots, \sigma_k$ découpent sur F le système $|C_1|$, de dimension π. Il en résulte que σ_1 a la dimension π et que $\sigma_2, \sigma_3, \ldots, \sigma_k$ ne rencontrent pas F. Les points unis de I_7 sont donc situés sur σ_1.

Considérons les hyperplans de $S_{7\pi-6}$ passant par σ_1, $\sigma_3, \ldots, \sigma_k$. Ils découpent sur F un système linéaire, que nous désignerons par $|C_2|$, qui appartient à I_7, car ces hyperplans sont unis pour l'homographie T. Aux courbes C_2 correspondent sur Φ des courbes Γ_2 formant un système linéaire complet $|\Gamma_2|$. Les courbes Γ_2 rencontrent une courbe Γ_1 en des groupes de $2\pi - 2$ points qui ne peuvent être spéciaux, puisque $|\Gamma_1|$ est son propre adjoint. Il en résulte que ces groupes appartiennent à une série complète dont la dimension est $\pi - 2$. La dimension r_2 de $|\Gamma_2|$, c'est-à-dire la dimension de l'espace σ_2, est donc en plus égale à $\pi - 2$.

On démontre de même que les dimensions $r_3, r_4, \ldots, r_k$ de $\sigma_3, \sigma_4, \ldots, \sigma_k$ sont en plus égales à $\pi - 2$.

D'après la théorie des homographies cycliques, on a

$$\pi + r_2 + r_3 + \ldots + r_k + k = 7\pi - 5$$

On en déduit

$$(\pi - 1)(k - 7) \geqq 0,$$

donc $k = 7$.

Nous désignerons par $|C_3|$, $|C_4|$, ..., $|C_7|$ les systèmes linéaires, appartenant à I_7, découpés par les hyperplans passant respectivement par $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_4, \dots, \sigma_7$, par $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_5, \dots, \sigma_7, \dots$, par $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \dots, \sigma_6$. Soient $|\Gamma_3|, |\Gamma_4|, \dots, |\Gamma_7|$ les systèmes qui leur correspondent sur Φ. Ces systèmes sont complets, de même que $|\Gamma_2|$; ils ont le genre $\pi - 2$, le degré $2\pi - 6$ et la dimension $\pi - 2$.

2. Soient A un point de F uni pour l'involution I_7, A' le point de diramation qui lui correspond sur Φ. Le point A' est multiple pour Φ et est précisément un point double. Il en résulte que A est un point symétrique [1] ; les courbes C_1 passant par A acquièrent en ce point la multiplicité deux et ont des tangentes fixes. Précisons ce rappel de résultats.

Le plan tangent α à F en A, plan qui est uni pour T, rencontre σ_1 au seul point A et s'appuie encore en un point sur deux des espaces $\sigma_2, \sigma_3, \dots, \sigma_7$, par exemple sur σ_2 et σ_3. Les tangentes fixes en A aux courbes C_1 passant par ce point sont précisément les tangentes à F en A s'appuyant sur σ_2 et sur σ_3.

Le point A' est double biplanaire et Φ possède deux points doubles infiniment voisins successifs de A' dont le dernier est biplanaire ordinaire. Au point de vue des transformations birationnelles, la singularité de la surface Φ en A' est équivalente à un ensemble de six courbes rationnelles, de degré -2,

$$\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \gamma_2, \beta_2, \alpha_2$$

[1] *Sur les points unis symétriques des involutions cycliques appartenant à une surface algébrique* (Revista de la Universidad Nacional de Tucuman, 1940, pp. 283-291).

dont chacune rencontre la précédente et la suivante en un point, mais ne rencontre pas les autres.

Pour déterminer le nombre de points unis de l'involution I_7, nous utiliserons la formule

$$12(p_a + 1) = 12p(\pi_a + 1) - (p^2 - 1)\beta,$$

où p_a est le genre arithmétique d'une surface contenant une involution cyclique d'ordre p, ayant β points unis symétriques, dont l'image a le genre arithmétique π_a (1). Actuellement, on a $p_a = 1, \pi_a = 1, p = 7$, d'où $\beta = 3$.

L'involution I_7 possède donc trois points unis symétriques, que nous désignerons par A_1, A_2, A_3, les points de diramation correspondant étant A'_1, A'_2, A'_3.

3. Pour étudier le point uni symétrique A, nous ramènerons la question à la géométrie plane de la manière suivante.

Considérons un espace σ_0 à $7\pi - 9$ dimensions, intersection d'un hyperplan passant par $\sigma_2, \sigma_3, \ldots, \sigma_7$ mais non par A, d'un hyperplan passant par $\sigma_1, \sigma_3, \ldots, \sigma_7$ et d'un hyperplan passant par $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_4, \ldots, \sigma_7$. Dans ces conditions, σ_0 n'a aucun point commun avec le plan α, tangent à F en A et qui s'appuie en un point sur σ_2 et σ_3.

Projetons les courbes C de σ_0 sur le plan α ; nous obtenons un système continu $\{\overline{C}\}$ transformé en lui-même par l'homographie T et aux courbes $C_1, C_2, \ldots, C_7$ correspondent des courbes transformées en elles-mêmes par T, les premières ne passant pas par A.

Les courbes $\overline{C}$ appartiennent à un système linéaire complet $|\overline{C}|$ transformé en lui-même par l'homographie T′ déterminée par T dans le plan α. Ce système contiendra sept systèmes linéaires partiels $|\overline{C}_1|$, $|\overline{C}_2|$,

(1) *Recherches sur les involutions douées d'un nombre fini de points de coïncidence, appartenant à une surface algébrique* (Bulletin de la Société Math. de France, 1919, pp. 1-16).

..., $|\overline{C}_7|$ appartenant à l'involution I'_7 engendrée par T' dans α. Ces courbes se comporteront en A comme les courbes C_1, C_2, ..., C_7 sur la surface F.

L'involution I'_7 possède trois points unis : le point A et les points de rencontre de α avec σ_2 et σ_3. Si l'on prend le triangle formé par ces points unis comme triangle de référence, le point A étant donné par $x_2 = x_3 = 0$, l'homographie T' est représentée par

$$x'_1 : x'_2 : x'_3 = x_1 : \epsilon x_2 : \epsilon^6 x_3,$$

où ϵ est une racine septième primitive de l'unité.

Les courbes $\overline{C}_1$, $\overline{C}_2$, ..., $\overline{C}_7$ se comportent en A comme les courbes du septième ordre transformées en elles-mêmes par T'. Il suffira donc de considérer les systèmes de courbes, que nous continuerons pour plus de simplicité à désigner par $|\overline{C}_1|$, $|\overline{C}_2|$, ..., $|\overline{C}_7|$,

$$\lambda_0 x_1^7 + \lambda_1 x_1^5 x_2 x_3 + \lambda_2 x_1^3 x_2^2 x_3^2 + \lambda_3 x_1 x_2^3 x_3^3 + \lambda_4 x_2^7 + \lambda_5 x_3^7 = 0, \qquad |\overline{C}_1|,$$

$$\lambda_1 x_1^6 x_2 + \lambda_2 x_1^4 x_2^2 x_3 + \lambda_3 x_1^2 x_2^3 x_3^2 + \lambda_4 x_1 x_3^6 + \lambda_5 x_2^4 x_3^3 = 0, \qquad |\overline{C}_2|,$$

$$\lambda_1 x_1^6 x_3 + \lambda_2 x_1^4 x_2 x_3^2 + \lambda_3 x_1^2 x_2^2 x_3^3 + \lambda_4 x_1 x_2^6 + \lambda_5 x_2^3 x_3^4 = 0, \qquad |\overline{C}_3|,$$

$$\lambda_1 x_1^5 x_2^2 + \lambda_2 x_1^3 x_2^3 x_3 + \lambda_3 x_1^2 x_3^5 + \lambda_4 x_1 x_2^4 x_3^2 + \lambda_5 x_2 x_3^6 = 0, \qquad |\overline{C}_4|,$$

$$\lambda_1 x_1^5 x_3^2 + \lambda_2 x_1^3 x_2 x_3^3 + \lambda_3 x_1^2 x_2^5 + \lambda_4 x_1 x_2^2 x_3^4 + \lambda_5 x_2^6 x_3 = 0, \qquad |\overline{C}_5|,$$

$$\lambda_1 x_1^4 x_2^3 + \lambda_2 x_1^3 x_3^4 + \lambda_3 x_1^2 x_2^4 x_3 + \lambda_4 x_1 x_2 x_3^5 + \lambda_5 x_2^5 x_3^2 = 0, \qquad |\overline{C}_6|,$$

$$\lambda_1 x_1^4 x_3^3 + \lambda_2 x_1^3 x_2^4 + \lambda_3 x_1^2 x_2 x_3^4 + \lambda_4 x_1 x_2^5 x_3 + \lambda_5 x_2^2 x_3^5 = 0. \qquad |\overline{C}_7|.$$

Commençons par étudier les courbes $\overline{C}_2$ et à cet effet, utilisons la transformation quadratique [1]

$$x_1 : x_2 : x_3 = y_1^2 : y_2 y_3 : y_1 y_3,$$

[1] Nous utilisons ici les procédés que nous avons utilisés dans l'étude des homographies planes, dans les notes suivantes : *Sur les homographies planes*

qui fait correspondre au point infiniment voisin de A sur $x_2 = 0$, le point $y_2 = y_3 = 0$. En opérant cinq fois de suite cette transformation, il correspond à $|\overline{C}_2|$ le système

$$\lambda_1 y_1^{21} y_1 + \lambda_2 y_1^{14} y_2^2 y_3^6 + \lambda_3 y_1^7 y_2^3 y_3^{12} + \lambda_4 y_1^{21} y_3 + \lambda_5 y_2^4 y_3^{18} = 0,$$

dont les courbes possèdent un point simple à tangente variable au point $y_2 = y_3 = 0$. Il en résulte qu'au point A sont infiniment voisins successifs cinq points unis A_2, A_{22}, A_{222}, A_{2222}, A_{22222}, dont le dernier que nous désignerons plus simplement par P_2, est uni parfait pour I'_7.

Étudions maintenant les courbes $\overline{C}_4$. En opérant une première fois la transformation (1), on obtient les courbes

$$\lambda_1 y_1^6 y_2^2 + \lambda_2 y_1^3 y_2^3 y_3^2 + \lambda_3 y_1^5 y_3^3 + \lambda_4 y_2^4 y_3^4 + \lambda_5 y_1^2 y_2 y_3^5 = 0.$$

En appliquant une seconde fois la transformation, nous obtenons

$$\lambda_1 y_1^8 y_2^2 + \lambda_2 y_1^4 y_2^3 y_3^3 + \lambda_3 y_1^9 y_3 + \lambda_4 y_2^4 y_3^6 + \lambda_5 y_1^5 y_2 y_3^4 = 0.$$

Enfin, appliquons à ces courbes la transformation

$$x_1 : x_2 : x_3 = y_1^2 : y_1 y_2 : y_2 y_3, \tag{2}$$

qui fait correspondre au point infiniment voisin de $y_2 = y_3 = 0$ sur $y_3 = 0$, le point $y_2 = y_3 = 0$ du second plan. Nous obtenons

$$\lambda_1 y_1^{14} y_2 + \lambda_2 y_1^7 y_2^5 y_3^3 + \lambda_3 y_1^{14} y_3 + \lambda_4 y_2^9 y_3^6 + \lambda_5 y_1^7 y_2^4 y_3^4 = 0.$$

Il en résulte que les courbes $\overline{C}_4$ ont un point double en A_2, un point simple en A_{22} et un point uni parfait $A_{223} \equiv Q_2$, distinct de A_{222} et infiniment voisin de A_{22}.

---

cycliques (MÉM. DE LA SOC. DES SC. DE LIÉGE, 1928, pp. 1-26) ; *Sur les surfaces représentant les involutions planes engendrées par des homographies cycliques* (Idem, 1933, pp. 1-21) ; *Sur les courbes tracées sur la surface représentant l'involution engendrée par une homographie plane cyclique* (Idem, 1931, pp. 1-14).

Passons aux courbes $\overline{C}_6$. En appliquant la transformation (1), on obtient

$$\lambda_1 y_1^6 y_2^3 + \lambda_2 y_1^8 y_3 + \lambda_3 y_1^3 y_2^4 y_3^2 + \lambda_4 y_1^5 y_2 y_3^3 + \lambda^5 y_2^5 y_3^4 = 0.$$

En appliquant ensuite deux fois la transformation (2), on obtient

$$\lambda_1 y_1^{14} y_2 + \lambda_2 y_1^{14} y_3 + \lambda_3 y_1^7 y_2^6 y_3^2 + \lambda_4 y_1^7 y_2^5 y_3^3 + \lambda_5 y_2^{11} y_3^4 = 0.$$

On en conclut que les courbes $\overline{C}_6$ passent simplement par A_2 et simplement par deux points unis infiniment voisins successifs de A_2, soit A_{23}, $A_{233} \equiv R_2$, le dernier étant uni parfait.

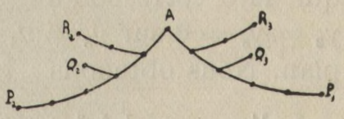
On parvient, par raison de symétrie, à des résultats analogues pour les courbes $\overline{C}_3$, $\overline{C}_5$ et $\overline{C}_7$.

Les courbes $\overline{C}_3$ ont en commun cinq points unis A_3, A_{33}, ..., $A_{33333} \equiv P_3$, infiniment voisins successifs de A, le point P_3 étant uni parfait.

Les courbes $\overline{C}_5$ ont un point double en A_3, un point simple en A_{33} et passant par un point uni parfait $A_{332} \equiv Q_3$, infiniment voisin de A_{33}.

Les courbes $\overline{C}_7$ ont un point simple en A_3 et passent par deux points unis A_{32}, $A_{322} \equiv R_3$, infiniment voisins successifs de A_3, le point R_3 étant uni parfait.

La structure du point uni A est schématisée par la figure ci-contre.



On voit aisément que les courbes $\overline{C}_1$ assujetties à passer par le point A, s'y comportent comme les courbes $\overline{C}_2 + \overline{C}_3$. Celles de ces courbes assujetties à toucher une troisième droite en A, s'y comportent comme les courbes $\overline{C}_4 + \overline{C}_5$. Enfin, celles de ces courbes assujetties à toucher une cinquième droite en A, s'y comportent comme les courbes $\overline{C}_6 + \overline{C}_7$. On peut d'ailleurs le vérifier aisément au moyen des transformations quadratiques (1) et (2).

4. Revenons à la surface F. Chacun des points unis A_1, A_2, A_3 de I_7 a une structure analogue à celle du point A que l'on vient d'établir.

Au point A_i font suite deux séries de cinq points unis infiniment voisins successifs ; nous désignerons l'une d'elles par A'_{i1}, A''_{i1}, A'''_{i1}, A''''_{i1}, P_{i1}, l'autre par A'_{i2}, A''_{i2}, A'''_{i2}, A''''_{i2}, P_{i2}. Aux points A''_{i1} est infiniment voisin un point uni Q_{i1} et au point A''_{i2} un point uni Q_{i2}. Au point A'_{i1} sont infiniment voisins successifs deux points A^*_{i1} et R_{i1}, au point A'_{i2} deux points A^*_{i2}, R_{i2}. Les points P_{i1}, P_{i2}, Q_{i1}, Q_{i2}, R_{i1}, R_{i2} sont unis parfaits pour l'involution I_7.

Appelons C'_1 les courbes C_1 passant par A_i, C''_1 les courbes C'_1 touchant en A_i une droite non unie pour l'homographie T, enfin C'''_1 les courbes C''_1 touchant en A_i une droite non unie pour l'homographie T.

Les courbes C'_1 ont un point double en A_i, une des branches passe par A'_{i1}, ..., P_{i1}, l'autre branche par A_{i2}, ..., P_{i2}. Il leur correspond les sections Γ'_1 de Φ par les hyperplans passant par A'_i. A'_i est double biplanaire pour Φ. Si nous projetons cette surface de A'_i sur un hyperplan ξ ne passant pas par A'_i, nous obtenons une surface Φ' ; sur cette surface, il correspond au domaine de A'_i l'ensemble de deux droites a_{i1}, a_{i2}. L'une de ces droites, a_{i1} par exemple, représente le domaine de P_{i1}, l'autre, a_{i2}, le domaine de P_{i2}. Les droites a_{i1}, a_{i2} se coupent en un point A''_i double biplanaire pour Φ'.

Les courbes C''_1 ont un point quadruple en A_i ; elles passent deux fois par A'_{i1}, une fois par A''_{i1} et par Q_{i1}, deux fois par A'_{i2}, une fois par A''_{i2} et Q_{i2}. Il leur correspond les sections Γ''_1 de Φ' par les hyperplans passant par A''_i. Si l'on projette Φ' de A''_i sur un hyperplan ξ' de ξ ne passant pas par A''_i, on obtient une surface Φ'' et au domaine de A''_i, point double biplanaire de Φ', il correspond sur Φ'' l'ensemble de deux droites

β_{i1}, β_{i2}. L'une, β_{i1} par exemple, représente le domaine du point uni parfait Q_{i1}, l'autre, β_{i2}, celui du point uni parfait Q_{i2}. Les droites β_{i1}, β_{i2} se coupent en un point A_i''' qui est double biplanaire pour Φ''.

On observera qu'aux droites α_{i1}, α_{i2} de Φ' correspondent sur Φ'' des points doubles coniques situés respectivement sur β_{i1}, β_{i2}.

Les courbes C_1''' ont un point sextuple en A_i, les tangentes étant fixes et unies par T. Ces courbes passent simplement par les points A_{i1}', A_{i1}^*, R_{i1}, A_{i2}', A_{i2}^*, R_{i2}.

Aux courbes C_1''' correspondent les sections de Φ'' par les hyperplans passant par A_i'''. Si l'on projette Φ'' de A_i''' sur un hyperplan ξ'' de ξ' ne passant pas par A_i''', on obtient une surface Φ''' sur laquelle il correspond, au domaine de A_i''', l'ensemble de deux droites γ_{i1}, γ_{i2}. L'une, γ_{i1}, correspond au domaine du point uni parfait R_{i1}, l'autre au domaine du point uni parfait R_{i2}. Les droites γ_{i1}, γ_{i2} se coupent en un point, simple pour Φ'''.

On retrouve ainsi la structure du point de diramation A_i' ; ce point est équivalent à l'ensemble de six droites de degré — 2,

$$\alpha_{i1},\ \beta_{i1},\ \gamma_{i1},\ \gamma_{i2},\ \beta_{i2},\ \alpha_{i2},$$

chacune rencontrant en un point la précédente et la suivante, mais ne rencontrant pas les autres.

5. Sur la surface F, les courbes C_2, C_3, ..., C_7 sont découpées par des hyperplans contenant l'axe σ_1 de T, par conséquent ces courbes passent par les trois points unis A_1, A_2, A_3 de I_7.

Ce passage peut avoir lieu, d'après ce qu'on a vu plus haut, de trois manières différentes. Envisageons par exemple les courbes C_2.

a) En un point A_i, les courbes C_2 peuvent passer simplement et contenir soit les points A_{i1}', A_{i1}'' ...,

P_{i1}, soit les points $A'_{i2}, \ldots, P_{i2}$. Nous dirons alors que les courbes C_2 présentent en A_i le type I.

b) Les courbes C_2 peuvent avoir en A_i la multiplicité deux et passer soit deux fois par A'_{i1}, une fois par A''_{i1}, Q_{i1}, soit deux fois par A'_{i2}, une fois par A''_{i2}, Q_{i2}. Nous dirons qu'elles présentent en A_i le type II.

c) Les courbes C_2 peuvent avoir en A_i un point triple et passer simplement soit par A'_{i1}, A^*_{i1}, R_{i1}, soit par A'_{i2}, A^*_{i2}, R_{i2}. Nous dirons qu'elles présentent en A_i le type III.

Nous avons vu que le système $|\Gamma_2|$ a le degré $2\pi - 6$, donc $|C_2|$ a le degré effectif $14\pi - 42$, mais le degré virtuel $14\pi - 14$. Il en résulte que les points A_1, A_2, A_3 absorbent ensemble 28 points d'intersection de deux courbes C_2.

Supposons que les courbes C_2 présentent, aux points A_1, A_2, A_3, λ fois le type I, μ fois le type II et ν fois le type III. En un point où elles présentent le type I, il y a six points d'intersection absorbés, en un point où elles présentent le type II, il y en à 10 et enfin, en un point où elles présentent le type III, il y en a 12. On doit donc avoir

$$6\lambda + 10\mu + 12\nu = 28,$$
$$\lambda + \mu + \nu = 3.$$

La seule solution en nombres entiers positifs est $\lambda = \mu = \nu = 1$. Ainsi, les courbes C_2 présentent le type I en un des points A_1, A_2, A_3, le type III en un second point et le type III au troisième point.

Il en est de même des courbes $C_3, C_4, \ldots, C_7$.

Supposons, pour fixer les idées, que les courbes C_2 présentent le type I en A_1, en passant par P_{11}, le type II en A_2, en passant par Q_{21}, le type III en A_3, en passant par R_{31}. Cela signifie que les courbes Γ_2 rencontrent en un point α_{11}, en un point β_{21} et en un point γ_{31}, mais ne rencontrent pas les autres courbes α, β, γ.

On sait que, sur Φ, les courbes Γ_1, Γ_2 sont liées par une relation fonctionnelle du type

$$\begin{aligned} 7\Gamma_1 \equiv 7\Gamma_2 &+ \lambda_{11}\,\alpha_{11} + \mu_{11}\,\beta_{11} + \nu_{11}\,\gamma_{11} + \nu_{12}\,\gamma_{12} \\ &\qquad + \mu_{12}\,\beta_{12} + \lambda_{12}\,\alpha_{12} \\ &+ \lambda_{21}\,\alpha_{21} + \mu_{21}\,\beta_{21} + \nu_{21}\,\gamma_{21} + \nu_{22}\,\gamma_{22} \\ &\qquad + \mu_{22}\,\beta_{22} + \lambda_{22}\,\alpha_{22} \\ &+ \lambda_{31}\,\alpha_{31} + \mu_{31}\,\beta_{31} + \nu_{31}\,\gamma_{31} + \nu_{32}\,\gamma_{32} \\ &\qquad + \mu_{32}\,\beta_{32} + \lambda_{32}\,\alpha_{32}, \end{aligned}$$

les λ, μ, ν étant des entiers.

En exprimant que les courbes Γ_2 rencontrent α_{11} mais non β_{11}, ..., α_{12}, on trouve

$$\begin{aligned} 7 - 2\lambda_{11} + \mu_{11} &= 0, & \lambda_{11} - 2\mu_{11} + \nu_{11} &= 0, \\ \mu_{11} - 2\nu_{11} + \nu_{12} &= 0, & \nu_{11} - 2\nu_{12} + \mu_{12} &= 0, \\ \nu_{12} - 2\mu_{12} + \lambda_{12} &= 0, & \mu_{12} - 2\lambda_{12} &= 0\ ; \end{aligned}$$

il suffit de couper successivement les courbes figurant dans la relation précédente par les courbes α_{11}, β_{11}, ..., α_{12}. On en déduit

$$\lambda_{11} = 6,\quad \mu_{11} = 5,\quad \nu_{11} = 4,\quad \nu_{12} = 3,\quad \mu_{12} = 2,\quad \lambda_{12} = 1.$$

On déterminera de même les valeurs de λ_{21}, μ_{21}, ..., λ_{32} et la relation fonctionnelle précédente prend la forme

$$\begin{aligned} 7\Gamma_1 \equiv 7\Gamma_2 &+ 6\alpha_{11} + 5\beta_{11} + 4\gamma_{11} + 3\gamma_{12} + 2\beta_{12} + \alpha_{12} \\ &+ 5\alpha_{21} + 10\beta_{21} + 8\gamma_{21} + 6\gamma_{22} + 4\beta_{22} + 2\alpha_{22} \\ &+ 4\alpha_{31} + 8\beta_{31} + 12\gamma_{31} + 9\gamma_{32} + 6\beta_{32} + 3\alpha_{32}. \end{aligned}$$

6. Le système complet $|\,2\Gamma_1\,|$ a la dimension $4\pi - 3$; il découpe sur une courbe Γ_2 une série d'ordre $4\pi - 4$ certainement non spéciale et par conséquent de dimension $3\pi - 2$. Par conséquent, il existe $\infty^{\pi-2}$ courbes $2\Gamma_1$, contenant une courbe Γ_2 comme partie. En d'autres termes, il existe $\infty^{\pi-2}$ hyperquadriques de S_π passant par une courbe Γ_2 et ne contenant pas Φ. Ces hyperquadriques découpent encore sur Φ un système $|K|$ de genre $\pi - 2$, de degré $2\pi - 6$ et de dimension $\pi - 2$. Observons qu'une hyperquadrique passant par une courbe Γ_2 mais non par Φ, passe par A'_1, par le point A'_2 et par le point double infiniment voisin, par le point A'_3 et par les deux points doubles infiniment voisins successifs. On a donc

$$\begin{aligned}2\Gamma_1 \equiv \Gamma_2 + K &+ \alpha_{11} + \beta_{11} + \gamma_{11} + \gamma_{12} + \beta_{12} + \alpha_{12}\\ &+ \alpha_{21} + 2\beta_{21} + 2\gamma_{21} + 2\gamma_{22} + 2\beta_{22} + \alpha_{22}\\ &+ \alpha_{31} + 2\beta_{31} + 3\gamma_{31} + 3\gamma_{32} + 2\beta_{32} + \alpha_{32}.\end{aligned}$$

En passant sur la surface F, on voit que la transformée de K est une courbe $2C_1 - C_2$, c'est-à-dire une courbe C_3, C_4, ... ou C_7, par exemple une courbe C_3. D'autre part, la relation fonctionnelle précédente montre que les courbes K rencontrent en un point chacune des courbes α_{12}, β_{22}, γ_{32}, donc la courbe C_3 présente le type I en A_1 et passe par P_{12}, le type II en A_2 et passe par Q_{22}, le type III en A_3 et passe par R_{32}.

On en conclut que $K = \Gamma_3$ satisfait à la relation fonctionnelle

$$\begin{aligned}7\Gamma_1 \equiv 7\Gamma_3 &+ \alpha_{11} + 2\beta_{11} + 3\gamma_{11} + 4\gamma_{12} + 5\beta_{12} + 6\lambda_{12}\\ &+ 2\alpha_{21} + 4\beta_{21} + 6\gamma_{21} + 8\gamma_{22} + 10\beta_{22} + 5\alpha_{22}\\ &+ 3\alpha_{31} + 6\beta_{31} + 9\gamma_{31} + 12\gamma_{32} + 8\beta_{32} + 4\alpha_{32}.\end{aligned}$$

Une courbe C_2 et une courbe C_3 ont un point d'intersection absorbé en A_1, quatre en A_2 et neuf en A_3, donc ces courbes se rencontrent en $14\pi - 28$ points variables. Une courbe Γ_2 coupe donc une courbe Γ_3 en $2\pi - 4$ points. Sur une de ces courbes, ce groupe est certainement non spécial et appartient donc à une série de dimension $\pi - 2$. Les courbes Γ_2 (ou Γ_3) découpent donc sur une courbe Γ_2 (ou Γ_3), une série linéaire complète.

7. Le nombre des points d'intersection d'une courbe C_4 avec une courbe C_2 (ou avec une courbe C_3) absorbés en A_1, A_2 et A_3 doit évidemment être multiple de 7. En se basant sur cette remarque, on voit facilement que les courbes C_4 ne peuvent présenter le type I au point A_1. D'autre part, elles présentent nécessairement le type I en un des points unis ; supposons qu'elles présentent ce type au point A_2 en passant par P_{21}. On voit facilement qu'elles présentent le type II au point A_3, en passant par Q_{32} et le type III au point A_1, en passant par R_{12}.

On en conclut que les courbes Γ_4 rencontrent en un point chacune des courbes γ_{12}, α_{21}, β_{32}, mais ne rencontre pas les autres courbes α, β. On a donc

$$\begin{aligned}7\Gamma_1 \equiv 7\Gamma_4 &+ 3\alpha_{11} + 6\beta_{11} + 9\gamma_{11} + 12\gamma_{12} + 8\beta_{12} + 4\alpha_{12}\\ &+ 6\alpha_{21} + 5\beta_{21} + 4\gamma_{21} + 3\gamma_{22} + 2\beta_{22} + \alpha_{22}\\ &+ 2\alpha_{31} + 4\beta_{31} + 6\gamma_{31} + 8\gamma_{32} + 10\beta_{32} + 5\alpha_{32}.\end{aligned}$$

En raisonnant comme plus haut, on voit que l'on a

$$\begin{aligned}7\Gamma_1 \equiv 7\Gamma_5 &+ 4\alpha_{11} + 8\beta_{11} + 12\gamma_{11} + 9\gamma_{12} + 6\beta_{12} + 3\alpha_{12}\\ &+ \alpha_{21} + 2\beta_{21} + 3\gamma_{21} + 4\gamma_{22} + 5\beta_{22} + 6\alpha_{22}\\ &+ 5\alpha_{31} + 10\beta_{31} + 8\gamma_{31} + 6\gamma_{32} + 4\beta_{32} + 2\alpha_{32}.\end{aligned}$$

Le comportement des deux derniers systèmes $|C_6|$, $|C_7|$ aux points A_1, A_2, A_3 se détermine sans difficulté et on a

$$\begin{aligned}7\Gamma_1 \equiv 7\Gamma_6 &+ 2\alpha_{11} + 4\beta_{11} + 6\gamma_{11} + 8\gamma_{12} + 10\beta_{12} + 5\alpha_{12}\\ &+ 4\alpha_{21} + 8\beta_{21} + 12\gamma_{21} + 9\gamma_{22} + 8\beta_{22} + 3\alpha_{22}\\ &+ 6\alpha_{31} + 5\beta_{31} + 4\gamma_{31} + 3\gamma_{32} + 2\beta_{32} + \alpha_{32},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}7\Gamma_1 \equiv 7\Gamma_7 &+ 5\alpha_{11} + 10\beta_{11} + 8\gamma_{11} + 6\gamma_{12} + 4\beta_{12} + 2\alpha_{12}\\ &+ 3\alpha_{21} + 6\beta_{21} + 9\gamma_{21} + 12\gamma_{22} + 8\beta_{22} + 4\alpha_{22}\\ &+ \alpha_{31} + 2\beta_{31} + 3\gamma_{31} + 4\gamma_{32} + 5\beta_{32} + 6\alpha_{32}.\end{aligned}$$

Une courbe Γ_4 et une courbe Γ_5 forment l'intersection de Φ avec une hyperquadrique. Il en est de même d'une courbe Γ_6 et d'une courbe Γ_7.

8. La surface Φ contient trois groupes de six courbes rationnelles de degré -2 et les courbes de deux de ces groupes n'ont évidemment aucun point commun. Si l'on adjoint à ces dix-huit courbes une section hyperplane Γ_1, on obtient 19 courbes linéairement indépendantes, le déterminant de ces courbes a en effet la valeur $7^3\ (2\pi - 2)$.

La surface Φ a donc le nombre-base $\rho = 19$.

L'existence, sur la surface Φ des 18 courbes α, β, γ et de l'une des courbes $\Gamma_2, \Gamma_3, \ldots, \Gamma_7$, suffit pour que cette surface soit l'image d'une involution d'ordre sept, ayant trois points unis, appartenant à une surface de genres un ($p_a = P_4 = 1$). Il suffit pour le prouver, de répéter un raisonnement bien connu [1].

On peut obtenir un autre modèle projectif de la surface Φ de la manière suivante : Supposons $\pi \geqslant 12$, ce qui n'est pas une restriction puisque l'on peut remplacer Γ_1 par un de ses multiples. Les points A'_1, A'_2, A'_3 et les couples de points doubles de Φ qui leur sont infiniment voisins appartiennent à un espace à 8 dimensions. Projetons Φ de cet espace sur un espace $S_{\pi-9}$, à $\pi - 9$ dimensions, qui ne le rencontre pas. Il correspond à Φ une surface Φ_1 d'ordre $2\pi - 20$ dont nous désignerons les sections hyperplanes par K. En posant, pour abréger l'écriture,

$$\Delta_i \equiv \alpha_{i1} + 2\beta_{i1} + 3\gamma_{i1} + 3\gamma_{i2} + 2\beta_{i2} + \alpha_{i2},$$

on a

$$K \equiv \Gamma_1 - \Delta_1 - \Delta_2 - \Delta_3.$$

Les courbes K sont de genre $\pi - 9$.

(1) *Les involutions cycliques...* (loc. cit.), pp. 30-31.

Sur la surface Φ_1, les courbes γ sont des droites ; les droites γ_{11}, γ_{12} sont coplanaires ; il en est de même des droites γ_{21}, γ_{22} et γ_{31}, γ_{32}.

Recherchons maintenant ce qui correspond, sur la surface Φ_1, aux courbes α et β. A cet effet, reprenons la surface Φ'' considérée plus haut. Sur cette surface, aux courbes C_1''' correspondent les sections par les hyperplans passant par le point A_1'' ; soient Γ_1''' ces sections. Considérons les sections de Φ'' par les hyperplans passant par la droite β_{i1}, par exemple. Ces courbes se décomposent en la droite β_{i1} et en des courbes $\Gamma_1''' - \beta_{i1}$, de genre $\pi - 4$, rencontrant β_{i1} en deux points, l'un variable, l'autre fixe et confondu avec le point double de Φ'' homologue de la courbe α_{i1}. Il en résulte que si l'on projette Φ'' de A_1'' sur l'hyperplan ξ''', il correspond à l'ensemble α_{i1}, β_{i1}, sur la surface Φ''' obtenue, un point double biplanaire situé sur la droite γ_{i1} de cette surface. Les points de Φ''' infiniment voisins de ce point double sur une nappe forment α_{i1}, sur l'autre nappe β_{i1}. La droite γ_{i1} appartient à cette dernière nappe (1).

Revenons à la surface Φ_1. Sur chacune des droites γ_{11}, γ_{12}, ..., γ_{32}, la surface possède un point double biplanaire. Considérons par exemple le point double appartenant à la droite γ_{11}. Le domaine de ce point est équivalent à deux droites α_{11}, β_{11} dont la seconde seule rencontre la droite γ_{11}.

Observons encore qu'aux courbes Γ_2, Γ_3, ..., Γ_7 correspondent sur Φ_1 des courbes d'ordre $2\pi - 8$.

Liége, le 21 avril 1945.

(1) On peut d'ailleurs observer que les courbes $K - \beta_{11}$ par exemple, rencontrent α_{11} en -1 point et par conséquent contiennent cette courbe. On en conclut que les courbes $K - \alpha_{11} - \beta_{11}$ sont en nombre $\infty^{\pi-10}$ et passent donc par un point fixe, double biplanaire pour la surface.