Sur le contact de surfaces le long de courbes,

par Lucien GODEAUX, Membre de la Société.

Dans une note récente [1], nous avons étudié les quadriques et les surfaces cubiques se touchant ou s'osculant en tout point d'intersection. Nous continuons dans cette nouvelle note ce genre de recherches en considérant les surfaces cubiques et les surfaces du quatrième ordre ayant un contact du premier ou du second ordre en tout point d'intersection. Comme dans notre première note, nous trouvons que cela exige en général l'existence, pour les surfaces en question, de points doubles sur la courbe de contact. Ces points doubles sont coniques s'il s'agit d'un contact ordinaire, sont biplanaires s'il s'agit d'un contact du second ordre.

De même que dans notre première note, nous n'avons pu trouver une méthode générale, permettant d'étendre nos résultats au cas de deux surfaces quelconques. Nous avons simplement pu considérer, comme généralisation, le cas d'une surface cubique ayant, avec une surface d'ordre n, un contact du second ordre le long d'une courbe d'ordre n. Mais nous avons utilisé la représentation plane de la surface cubique.

Comme nous l'avons fait remarquer, la question est en liaison avec la théorie des involutions cycliques appartenant à une surface algébrique, n'ayant qu'un nombre fini de points unis. Cette théorie, que nous avons développée depuis plusieurs années [2], nous a notamment permis de démontrer l'existence de certaines surfaces considérées. Inversement, l'étude actuelle nous a conduit à la construction d'exemples de surfaces images d'involutions. Nous traitons rapidement d'un tel exemple à la fin de la note, nous réservant d'y revenir plus tard.

1. Soit F_4 une surface du quatrième ordre et Q une quadrique touchant F_4 le long d'une quartique Γ. Nous supposerons que les surfaces F_4 et Q sont les plus générales satisfaisant à cette condition.

---

(1) Sur le contact des surfaces cubiques (*Bull. de la Soc. roy. des Sciences de Liége*, 1944, pp. 2-10).

(2) Voir notre exposé sur *Les involutions cycliques appartenant à une surface algébrique* (Paris, Hermann, 1935).

La courbe Γ est nécessairement base d'un faisceau de quadriques, car si Γ appartenait à la seule quadrique Q, celle-ci serait le lieu des trisécantes de la courbe et chacune de ces trisécantes touchant la surface F_4 en trois points, appartiendrait à cette surface. F_4 comprendrait donc Q comme partie et le problème n'aurait plus de sens.

Considérons un point quelconque P de l'espace et soit n le nombre des plans passant par P, tangents aux surfaces F_4, Q en des points de Γ. Désignons par $P_1, P_2, \ldots, P_n$ ces points.

Le plan polaire de P par rapport à Q passe par les points $P_1, P_2, \ldots, P_n$ et on a donc $n \leqslant 4$. Si l'on avait $n < 4$, il faudrait qu'en $4-n$ points de Q situés sur la courbe Γ, les plans tangents à Q soient indéterminés, c'est-à-dire que Q possède $4-n$ points doubles. Or, Q ne peut être un cône ayant son sommet sur Γ, à moins que cette courbe ne présente elle-même un point double. Ce cas se trouve exclu par l'hypothèse que les surfaces F_4 et Q, et par suite la courbe Γ, sont les plus générales possibles. On a donc $n=4$.

La première polaire φ_3 de P par rapport à F_4 coupe celle-ci suivant une courbe d'ordre 12 rencontrant Γ en 12 points. Quatre de ces points sont P_1, P_2, P_3, P_4 et varient avec P. En chacun des huit autres points, le plan tangent à F_4 doit être indéterminé; ces huit points sont donc doubles pour la surface F_4.

Par la courbe Γ passent ∞^1 quadriques découpant sur F_4 un faisceau $|\Gamma_1|$ de quartiques elliptiques dont fait partie Γ. Par chaque courbe Γ_1 passent ∞^1 quadriques. Il en résulte que les huit points doubles de la surface F_4 forment un groupe de Lamé, c'est-à-dire sont la base d'un réseau de quadriques.

Inversement, considérons un réseau de quadriques ayant huit points-base et soit

$$\lambda^2\varphi_1 + 2\lambda\varphi_2 + \varphi_3 = 0 \tag{1}$$

un système d'indice deux appartenant à ce réseau. L'enveloppe de ce système,

$$\varphi_2^2 - \varphi_1\varphi_2 = 0, \tag{2}$$

est une surface du quatrième ordre possédant huit points doubles coniques aux points-base du réseau. Chaque quadrique du système (1) touche la surface enveloppe suivant une quartique elliptique.

La condition nécessaire et suffisante pour qu'une quadrique touche une surface du quatrième ordre suivant une quartique est que celle-ci soit elliptique et que la surface du quatrième *ordre possède, sur la quartique, huit points doubles coniques formant un groupe de Lamé.*

On sait que la surface (2) représente une involution du second ordre appartenant à une surface de genres un ($p_a = P_4 = 1$), les points doubles coniques étant les points de diramation. Cette involution appartient à la surface de S_5 :

$$x_4^2 = \varphi_1(x_0, x_1, x_2, x_3), \quad x_4 x_5 = \varphi_2, \quad x_5^2 = \varphi_3,$$

et est engendrée par l'homographie harmonique

$$x'_0 : x'_1 : x'_2 : x'_3 : x'_4 : x'_5 = x_0 : x_1 : x_2 : x_3 : -x_4 : -x_5.$$

2. Soient maintenant F_3 une surface cubique et F_4 une surface du quatrième ordre se touchant le long d'une sextique Γ.

La première polaire d'un point P par rapport à F_3 coupe Γ en 12 points, parmi lesquels se trouvent les n points $P_1, P_2, \ldots, P_n$ de contact des plans tangents à F_3 et F_4 passant par P. La première polaire de P par rapport à F_4 coupe Γ en 18 points parmi lesquels $P_1, P_2, \ldots, P_n$. On a $n \leqslant 12$. Il existe par conséquent $18 - n \geqslant 6$ points de Γ en chacun desquels le plan tangent à F_4 est indéterminé; ces points sont doubles pour F_4 et en général doubles coniques.

Soit $\alpha = 18 - n \geqslant 6$ le nombre des points doubles coniques. La surface F_4, assujettie à la seule condition de toucher F_3 le long de Γ, est de genres un ($p_a = P_4 = 1$); sur cette surface, chacun des points doubles coniques est équivalent à une courbe rationnelle infiniment petite de degré -2. Désignons par $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_\alpha$ les courbes rationnelles équivalentes aux α points doubles, par C les sections planes de F_4. Nous avons

$$2\Gamma + \gamma_1 + \gamma_2 + \cdots + \gamma_\alpha \equiv 3C.$$

La courbe Γ rencontre chacune des courbes $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_\alpha$ en un point. Si nous désignons par π le genre de Γ, nous avons

$$4\pi - 4 + \alpha = 18,$$

d'où

$$\alpha = 22 - 4\pi.$$

On a d'ailleurs $\pi \leqslant 4$. D'autre part, le raisonnement précédent montre que la surface F_3 possède $12 - n$ points doubles. La surface F_3, n'étant pas réglée par hypothèse, possède au plus quatre points doubles, donc on a $n \geqslant 8$ et par suite $\alpha \leqslant 10$, $\pi \geqslant 3$.

Pour $\pi = 4$, on a $\alpha = 6$ et pour $\pi = 3$, $\alpha = 10$.

Nous examinerons successivement ces deux cas.

3. Supposons en premier lieu que les surfaces F_3, F_4 se touchent le long d'une sextique Γ de genre quatre. La courbe Γ est la section de la surface F_3 par une quadrique Q et nous allons voir que la surface F_4 se réduit à cette quadrique comptée deux fois.

Les surfaces du quatrième ordre sont en nombre ∞^{34}; elles découpent sur la courbe Γ une série g^{20}_{24}, certainement non spéciale. Il y a donc ∞^{13} surfaces du quatrième ordre contenant la courbe Γ. Parmi ces surfaces se trouvent, d'une part, les surfaces formées de la surface F_3 et d'un plan, en nombre ∞^3 et, d'autre part, les surfaces formées de la quadrique Q et d'une quadrique, en nombre ∞^9. Une surface du quatrième ordre passant par Γ ne peut appartenir à la fois à ces deux systèmes de surfaces dégénérées. Il en résulte que toutes les surfaces du quatrième ordre contenant Γ forment un système linéaire complètement déterminé par les deux systèmes de surfaces dégénérées envisagées.

La surface générale du faisceau déterminé par la quadrique Q comptée deux fois et par l'ensemble de la surface F_3 et d'un plan σ, est irréductible et touche F_3 le long de la sextique Γ.

4. Supposons maintenant que la courbe Γ soit de genre trois. La surface F_4 possède dix points doubles coniques et la surface F_3 quatre points doubles coniques sur la courbe Γ.

Représentons point par point la surface F_3 sur un plan σ. On sait que cette représentation peut être faite de manière qu'aux sections planes de F_3 correspondent les cubiques planes γ_3 circonscrites à un quadrilatère complet. Soient a_1, a_2, a_3, a_4 les côtés de ce quadrilatère, A_{ik} le sommet commun aux côtés a_i, a_k. Les points doubles de F_3 correspondent aux côtés du quadrilatère et les droites joignent ces points deux-à-deux aux domaines des points A_{ik} (les points doubles de F_3 sont les sommets d'un tétraèdre proprement dit).

A la section de F_3 par une surface du quatrième ordre correspond dans σ une courbe d'ordre douze, passant quatre fois par les sommets A_{ik} du quadrilatère. Si la surface du quatrième ordre passe par les points doubles de F_3, comme c'est le cas pour la surface F_4, la courbe du douzième ordre comprend les droites a_1, a_2, a_3, a_4 et est complétée par une courbe du huitième ordre passant deux fois par les points A_{ik}. Parmi ces courbes, se trouve la courbe formée d'une quartique γ_4 ciconscrite au quadrilatère, comptée deux fois. A γ_4 correspond sur F_3 une courbe d'ordre six et de genre trois passant par les points doubles de la surface. Cette courbe ne peut être située sur une quadrique, car à la section de F_3 par une quadrique passant par les points doubles correspond dans σ une courbe formée des droites a_1, a_2, a_3, a_4 et d'une conique. La courbe de F homologue de γ_4 peut donc être prise pour courbe Γ et il existe une surface du quatrième ordre irréductible F_4 touchant F_3 le long de Γ.

On arrive à la même conclusion par un décompte de constantes. Les surfaces du quatrième ordre découpent, sur Γ, une série g^{21}_{24}, donc il existe ∞^{12} surfaces du quatrième ordre contenant Γ. Parmi ces surfaces se trouvent les ∞^3 surfaces formées de F_3 et d'un plan; il y a donc ∞^8 surfaces du quatrième ordre irréductible passant par Γ. Elles découpent sur F_3, en dehors de Γ, des courbes Γ', d'ordre six et de genre trois, rencontrant Γ en dix points. Ces groupes de dix points forment sur Γ une série g^7_{10}; il y a une courbe Γ' passant par huit points de Γ, c'est-à-dire une surface du quatrième ordre touchant F_3 en huit points arbitraires de Γ; cette surface touche en conséquence F_3 en onze points de Γ et par suite en tout point de Γ.

La conditon nécessaire et suffisante pour qu'une surface cubique et une surface du quatrième ordre se touchent le long d'une sextique est que :

1° *La sextique soit de genre quatre. La surface du quatrième ordre possède alors six points doubles coniques sur la sextique; la surface cubique n'en possède pas en général.*

2° *La sextique soit de genre trois. La surface du quatrième ordre possède alors dix points doubles et la surface du troisième ordre quatre points doubles sur la sextique.*

5. Considérons une surface cubique F_3 et une surface du quatrième ordre F_4 ayant entre elles un contact du second ordre le long d'une quartique Γ.

Commençons par observer que si l'une de ces surfaces possède un point double sur la courbe Γ, ce point est biplanaire. Supposons, pour fixer les idées, que A soit double pour la surface F_4, mais simple pour la surface F_3 et soit α le plan tangent à cette surface en ce point.

Une courbe γ tracée sur F_3 et passant par A doit rencontrer F_4 en trois points confondus en A, par conséquent, la courbe γ touche F_4 en A. Il en résulte que le plan α est tangent à la surface F_4 en A. Ce point est donc double biplanaire pour cette surface.

La quadrique polaire d'un point quelconque P rencontre Γ en huit points, donc il y a en plus huit plans tangents à F_3 et F_4 en des ponits de Γ, passant par P.

La première polaire de P par rapport à F_4 coupe Γ en douze points, donc en quatre de ces points au moins le plan tangent à F_4 doit être indéterminé. La surface F_4 a au moins quatre points doubles (biplanaires) sur Γ. Supposons qu'elle en ait exactement $\nu \geqslant 4$. La surface F_3 a alors $\nu - 4$ points doubles (biplanaires) sur Γ.

La surface F_4 est de genres un ($p_a = P_4 = 1$). Sur cette surface, chaque point double biplanaire est équivalent à deux courbes rationnelles de degré -2 se rencontrant en un point. Nous désignerons par γ_{11} et γ_{12}, γ_{21} et γ_{22}, ..., $\gamma_{\nu 1}$ et $\gamma_{\nu 2}$ les ν couples de courbes rationnelles équivalentes aux ν points doubles biplanaires de F_4. Nous supposons que la droite γ_{i1} représente les points infiniment voisins du i-ième point, situés dans le plan tangent en ce point à F_3.

La courbe Γ rencontre la droite γ_{i1} en un point, mais ne rencontre pas la droite γ_{i2}.

En désignant par C une section plane de F_4, nous avons sur cette surface la relation fonctionnelle

$$3\,\Gamma + \lambda_{11}\gamma_{11} + \lambda_{21}\gamma_{21} + \cdots + \lambda_{\nu 1}\gamma_{\nu 1} + \lambda_{12}\gamma_{12} + \lambda_{22}\gamma_{22} + \cdots + \lambda_{\nu 2}\gamma_{\nu 2} \equiv 3\,C,$$

les λ étant des entiers.

En exprimant que Γ rencontre γ_{11}, γ_{21}, ..., γ_{ν} chacune en un point et ne rencontre pas les courbes γ_{12}, γ_{22}, ..., $\gamma_{\nu 2}$, on trouve

$$\lambda_{11} = \lambda_{21} = \cdots = \lambda_{\nu 1} = 2, \quad \lambda_{12} = \lambda_{22} = \cdots = \lambda_{\nu 2} = 1\,;$$

d'où la relation

$$3\Gamma + 2\,(\gamma_{11} + \gamma_{21} + \cdots + \gamma_{\nu 1}) + \gamma_{12} + \gamma_{22} + \cdots + \gamma_{\nu 2} \equiv 3\,C.$$

Soit π le genre de Γ. De la relation précédente, on déduit

$$3\,(2\,\pi - 2) + 2\,\nu = 12,$$

d'où

$$\nu = 3\,(3 - \pi).$$

π peut prendre les valeurs 0 ou 1. Si $\pi = 0$, on a $\nu = 9$ et la surface F_3 possède $\nu - 4 = 5$ points doubles biplanaires, ce qui est impossible. On a donc nécessairement $\pi = 1$ et par suite $\nu = 6$.

La surface F_4 possède six et la surface F_3 deux points doubles biplanaires sur la quartique elliptique Γ.

6. Représentons la surface F_3 sur un plan σ. Cette représentation peut être faite de la manière suivante : Soient β_1, β_2 deux coniques bitangentes, A_1 et A_2 les points de contact, a_1 et a_2 les tangentes en ces points aux deux coniques. Aux sections planes de F_3 correspondent dans σ les cubiques γ_3 osculant β_1 en A_1 et β_2 en A_2.

Aux ∞^2 courbes γ_3 ayant un point double en A_1 (et qui touchent encore β_1 en ce point) correspondent les sections de F_3 par les plans passant par un point double P_1 de F_3. De même, aux courbes γ_3 ayant un point double en A_2 correspondent les sections de F_3 par les plans passant par un point double P_2 de cette surface. Aux courbes γ_3 ayant des points doubles en A_1, A_2 et par conséquent formées de la droite $a = A_1A_2$ et de coniques β touchant β_1, β_2 en A_1, A_2, correspondent les sections de F_3 par les plans contenant P_1P_2. On en conclut qu'à la droite a correspond sur F_3 la droite $p = P_1P_2$. En particulier, à la cubique γ_3 formée de la droite a comptée trois fois, correspond une section plane de F_3 formée de la droite p comptée trois fois; il y a donc un plan ϖ ayant un contact du second ordre avec F_3 le long de p [3]. Ce plan est tangent en P_1, P_2 à F_3.

Le cône tangent à F_3 en P_1 se compose du plan ϖ et d'un plan ϖ_1. Aux points de F_3 infiniment voisins de P_1 situés dans le plan ϖ_1 correspondent les points de σ infiniment voisins du point A'_1, lui-même infiniment voisin de A_0 sur β_1, β_2.

Le plan ϖ_1 coupe F_3 suivant trois droites passant par P_1 et qui sont : une droite p_{11} correspondant à a_2; une droite p_{12} correspondant à la conique β_2; une droite p_{10} correspondant au domaine du point A''_1, infiniment voisin de A'_1 sur la conique β_1 et par suite sur les courbes γ_3.

Nous avons vu qu'aux sections de F_3 par les plans passant par P_1 correspondaient les cubiques γ_3 ayant un point double en A_1 et tangentes à la droite a_1. Aux points du domaine de A'_1 correspondent les points de F_3 infiniment voisins de P_1 dans le plan ϖ_1, donc aux points du domaine de A_1 correspondent les points de F_3 infiniment voisins de P_1 dans le plan ϖ.

On obtient des résultats analogues pour les points A_2 et P_2.

A la section de F_3 par une surface du quatrième ordre passant

---

(3) Cf. notre note : Sur le contact des surfaces cubiques (*Bull. de la Soc. roy. des Sciences de Liége*, 1944, pp. 2-10), n° 6.

par P_1, P_2 correspond dans σ une courbe γ_{12} du douzième ordre ayant la multiplicité cinq en A_1, la multiplicité quatre en A'_1, la multiplicité trois en A''_1 et un comportement analogue en A_2.

A la courbe Γ correspond une quartique plane elliptique γ_4 qui, comptée trois fois, est une courbe totale du système $|\gamma_{12}|$. Deux cas peuvent se présenter :

a) La courbe γ_4 possède un point de rebroussement en A_1, la tangente de rebroussement étant a_1; elle passe simplement par A'_1, A''_1 et possède la même singularité en A_2.

b) La courbe γ_4 a un point double en A_1, passe simplement par A'_1, A''_1 et possède la même singularité en A_2.

Le premier cas ne peut se présenter, car la conique β_1 devrait osculer γ_4 en A_1, ce qui est impossible puisque ce point est de rebroussement. C'est donc le second cas qui se présente. La courbe $3\gamma_4$ a un point sextuple en A_1, des points triples en A'_1, A''_1 et possède la même singularité en A_2. La courbe Γ touche en chacun des points P_1, P_2 le plan ϖ.

La condition nécessaire et suffisante pour qu'une surface cubique et une surface du quatrième ordre aient un contact du second ordre le long d'une quartique est que celle-ci soit elliptique et que la surface du quatrième ordre ait six, la surface cubique deux points doubles biplanaires sur la quartique.

7. On peut construire un exemple de surface cubiques osculant une surface du quatrième ordre le long d'une quartique gauche elliptique en utilisant la théorie des involutions cycliques.

Soit Φ une surface normale de genres un ($p_a = P_4 = 1$), de l'espace S_7, transformée en elle-même par une homographie Ω de période trois, ayant comme axes un espace linéaire à trois dimensions rencontrant la surface en six points, et deux droites ne rencontrant pas la surface. La surface Φ est d'ordre douze, à sections hyperplanes de genre sept et l'homographie Ω engendre sur cette surface une involution I_3, d'ordre trois, n'ayant qu'un nombre fini de points unis. L'involution I_3 est par conséquent de genres un et est représentée par une surface du quatrième ordre possédant six points doubles biplanaires [4]. Il

---

[4] Voir notre Mémoire sur les involutions appartenant à une surface de genres un (*Annales de l'École Normale supérieure*, 1914, pp. 357-430; 1919, pp. 51-70). Voir aussi : Sur les surfaces du quatrième ordre possédant six points doubles biplanaires ordinaires (*Bull. de l'Acad. roy. de Belgique*, 1922, pp. 443-456).

existe sur la surface deux faisceaux de quartiques elliptiques passant par les six points doubles biplanaires. Nous avons établi, dans nos travaux cités, que le long de chacune de ces quartiques il existe une surface cubique ayant, avec la surface F, un contact du second ordre.

8. Considérons enfin une surface cubique F_3 et une surface F_n d'ordre $n>4$, ayant un contact du second ordre le long d'une courbe Γ_n d'ordre n.

La quadrique polaire d'un point P par rapport à F_3 coupe Γ_n en $2n$ points. La surface polaire du même point par rapport à F_n coupe Γ_n en $n(n-1)$ points dont $2n$ au plus sont simples pour F_n. Cette surface a donc au moins $n(n-3)$ points doubles biplanaires sur la courbe Γ_n. D'autre part, F_3 possède au plus trois points doubles biplanaires, dont F_n a au plus $n(n-3)+3$ points doubles biplanaires sur la courbe Γ_n.

Soit ν le nombre de points doubles biplanaires de F_n sur la courbe Γ_n. Chacun de ces points équivaut à deux courbes rationnelles de degré -2, se coupant en un point; soient γ_{i1}, γ_{i2} les courbes équivalentes au i-ième de ces points. Si C désigne une section plane de F_n, on a, en raisonnant comme plus haut,

$$3\,\Gamma_n + 2\,\Sigma\gamma_{i1} + \Sigma\gamma_{i2} \equiv 3\,C.$$

On en déduit

$$3\,[\Gamma_n, \Gamma_n] + 2\,\nu = 3\,n$$

et $3n-2\nu$ doit donc être divisible par 3.

Si $\nu = n(n-3)$, n doit être multiple de 3.

Si $\nu = n(n-3)+1$, n^2+1 doit être multiple de 3, ce qui est impossible.

Si $\nu = n(n-3)+2$, n n'est pas divisible par 3.

Si $\nu = n(n-3)+3$, n doit être multiple de 3.

9. Supposons en premier lieu $\nu = n(n-3)$ et $n = 3k$. La surface F_3 ne possède aucun point double biplanaire sur Γ_n.

On peut montrer immédiatement l'existence de ce cas. Soient, en effet, Φ_{n-3} une surface quelconque d'ordre $n-3$ et φ_k une surface d'ordre k. Prenons pour courbe Γ_n l'intersection des surfaces F_3 et φ_k.

La surface générale F_n du faisceau déterminé par les surfaces $F_3 + \Phi_{n-3}$ et $3\varphi_k$ est irréductible et a un contact du second ordre avec la surface F_3 le long de Γ_n.

La courbe (F_3, Φ_{n-3}), d'ordre $3(n-3)$, intersection des surfaces

F_3, Φ_{n-3}, coupe φ_k en $3k(n-3)=n(n-3)$ points situés sur Γ_n. Soit A un de ces points. Les plans tangents en A aux surfaces F_3, Φ_{n-3}, qui sont distincts, sont tangents en A à la surface F_n. Par conséquent, A est un point double biplanaire de F_n. On retrouve ainsi les $n(n-3)$ points doubles biplanaires de F_n situés sur Γ_n.

La courbe Γ_n est de genre $\frac{1}{2}$ $(3n^2-3n+2)$.

10. Passons ensuite à l'examen du dernier cas :

$$n = 3\,k, \quad \nu = 9\,k\,(k-1) + 3.$$

La surface F_3 possède trois points doubles biplanaires A_1, A_2, A_3 sur la courbe Γ_n. Soient α_1, α_2, α_3 les plans qui, comme on sait, en un contact du second ordre avec F_3 respectivement le long des droites A_2A_3, A_3A_1, A_1A_2. Les plans tangents en A_1 sont α_2, α_3; en A_2, α_3, α_1 et en A_3, α_1, α_2.

On peut représenter la surface F_3 sur un plan σ de manière qu'à ses sections planes correspondent les cubiques γ_3 circonscrites au triangle $O_1O_2O_3$ et touchant O_1O_2, O_2O_3, O_3O_1 respectivement en O_1, O_2, O_3. Nous désignerons par O'_1, O'_2, O'_3 les points infiniment voisins de O_1, O_3, O_3 respectivement sur O_1O_2, O_2O_3, O_3O_1.

On sait qu'aux points infiniment voisins de O_1 correspondent les points de F_3 infiniment voisins de A_1 situés dans le plan α_2 et qu'aux points de la droite O_1O_3 correspondent les points infiniment voisins de A_1 situés dans le plan α_3. On a des propriétés analogues pour O_2 et O_3.

A la section de F_3 par une surface d'ordre $n=3k$ passant par A_1, A_2, A_3 correspond dans σ une courbe γ_{9k} d'ordre $9k$ passant $3k+1$ fois par O_1, O_2, O_3, $3k-1$ fois par O'_1, O'_2, O'_3 et touchant en O_1, O_2, O_3 respectivement O_1O_3, O_2, O_1, O_3O_2. Cette courbe comprend donc comme parties les côtés du triangle $O_1O_2O_3$ et est complétée par une courbe d'ordre $9k-3$, γ_{k-3}, passant $3k-1$ fois par O_1, O_2, O_3 et $3k-2$ fois par O'_1, O'_2, O'_3.

Pour notre objet, il faut examiner s'il existe une courbe γ_{3k-1}, d'ordre $3k-1$, telle que la courbe $3\gamma_{3k-1}$ appartienne au système $|\gamma_{9k-3}|$. Il suffit de prendre la courbe γ_{3k-1} passant k fois par les points O_1, O_2, O_3 et $k-1$ fois par les points O'_1, O'_2, O'_3.

A la courbe γ_{3k-1} ainsi choisie, correspond sur F_3 une courbe Γ_n, d'ordre $n=3k$, passant par A_1, A_2, A_3 et touchant en ces points respectivement les plans α_1, α_2, α_3. Il existe une surface F_n d'ordre $n=3k$ ayant un contact du second ordre avec F_3 le long de Γ_n.

La courbe Γ_n est de genre $\frac{3}{2} k(k-1)$.

11. Il nous reste à examiner le cas où l'on a $\nu=n(n-3)+2$, n étant de la forme $3k+1$ ou $3k+2$. La surface F_3 possède alors deux points doubles biplanaires A_1, A_2, sur Γ_n.

Représentons la surface F_3 sur un plan σ de telle sorte qu'à ses sections planes correspondent les cubiques γ_3 s'osculant en deux points O_1, O_2. Désignons par O'_1, O''_1 les points infiniment voisins successifs de O_1 appartenant à toutes les courbes γ_3 et par O'_2, O''_2 les points infiniment voisins successifs de O_2 appartenant également à toutes les courbes γ_3.

La droite O_1O_2, comptée trois fois, a pour homologue la section de F_3 par un plan α osculant la surface le long de la droite A_1A_2. En A_1, les plans tangents sont α et un plan α_1, en A_2, le plan α et un plan α_2.

Aux points infiniment voisins de O_1 (ou de O_2) correspondent les points de F_3 infiniment voisins de A_1 (ou de A_2) situés dans α. Aux points infiniment voisins de O'_1 (ou O'_2) correspondent les points infiniment voisins de A_1 (ou de A_2) situés dans α_1 (ou dans α_2).

A la section de F_3 par une surface F_n passant par les points A_1, A_2 correspond dans σ une courbe γ_{3n}, d'ordre $3n$, ayant la multiplicité $n+1$ en O_1, O_2, la multiplicité n en O'_1, O'_2 et la multiplicité $n-1$ en O''_1, O''_2.

Pour notre objet, nous devons trouver une courbe γ_n, d'ordre n, telle que la courbe $3\gamma_n$ appartienne au système linéaire $|\gamma_{3n}|$.

Supposons $n=3k+1$. Nous pouvons prendre pour γ_n une courbe passant $k+1$ fois par O_1 et O_2, k fois par les points O'_1 et O'_2, O''_1 et O''_2. Alors, la courbe $3\gamma_n$ appartient au système $|\gamma_{3n}|$. A la courbe γ_n correspond sur F_3 une courbe Γ_n, d'ordre n, touchant en A_1 le plan α et en A_2 le plan α également. Il existe une surface F_n d'ordre n osculant F_3 le long de γ_n et le plan α est bitangent, en A_1 et A_2, à la surface F_n. La courbe Γ_n est de genre $\frac{1}{2} k(3k-1)$.

Supposons maintenant $n=3k+2$. Prenons pour courbe γ_n une courbe passant $k+1$ fois par les points O_1 et O_2, O'_1 et O'_2 et k fois par O''_1 et O''_2. La courbe $3\gamma_n$ appartient au système $|\gamma_{3n}|$; il lui correspond sur F_3 une courbe Γ_n tangente en A_1 au plan α_1 et en A_2 au plan α_2. La courbe Γ_n est de genre $\frac{1}{2} k(3k+1)$.

Les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'une surface cubique et une surface d'ordre n *aient un contact du second ordre le long d'une courbe d'ordre* n *sont :*

1° *Que* $n=3k$ *et que cette courbe soit l'intersection de la surface cubique et d'une surface d'ordre* k. *La surface d'ordre* n *possède* $n(n-3)$ *points doubles biplanaires sur la courbe et la surface cubique en est dépourvue.*

2° *Que* $n=3k$ *et que la surface d'ordre* n *possède* $n(n-3)+3$, *la surface cubique trois points doubles biplanaires sur la courbe de contact.*

3° *Que* $n=3k+1$ *ou* $n=3k+2$ *et que la surface d'ordre* n *possède* $n(n-3)+2$, *la surface cubique deux points doubles biplanaires sur la courbe de contact.*

12. Nous allons, pour terminer, nous occuper d'une surface du sixième ordre image d'une involution cyclique de période trois appartenant à une surface algébrique, surface à laquelle les problèmes précédents nous ont conduit.

Soient

$$\varphi_1(x_0, x_1, x_2, x_3) = 0, \quad \varphi_2(x_0, x_1, x_2, x_3) = 0$$

les équations de deux surfaces cubiques quelconques et

$$f(x_0, x_1, x_2, x_3) = 0$$

l'équation d'une quadrique.

Considérons la surface F d'équation

$$\varphi_1\varphi_2 - f^3 = 0.$$

Cette surface, du sixième ordre, est osculée par $\varphi_1=0$, $\varphi_2=0$ le long de courbes Γ_1, Γ_2 du sixième ordre et de genre quatre. Elle possède 18 points doubles biplanaires,

$$\varphi_1 = 0, \quad \varphi_2 = 0, \quad f = 0.$$

En désignant par γ_{i1}, γ_{i2} les droites de degré -2 équivalentes au i-ième point double, nous avons

$$3\,\Gamma_1 + 2\,\Sigma\gamma_{i1} + \Sigma\gamma_{i2} \equiv 3\,C,$$
$$3\,\Gamma_2 + \Sigma\gamma_{i1} + 2\,\Sigma\gamma_{i2} \equiv 3\,C,$$

C étant une section plane de la surface F.

D'après la théorie des involutions que nous avons établies (*loc. cit.*), il résulte que F est l'image d'une involution cyclique du troisième ordre, appartenant à une surface Φ et possédant 18 points unis. Cette surface Φ appartient à l'espace S_5 et a pour équations

$$x_4^3 = \varphi_1, \quad x_5^3 = \varphi_2, \quad x_4 x_5 = f.$$

L'involution qu'elle contient est engendrée par l'homographie

$$x'_0 : x'_1 : x'_2 : x'_3 : x'_4 : x'_5 = x_0 : x_1 : x_2 : x_3 : \varepsilon x_4 : \varepsilon^2 x_5,$$

où ε est une racine cubique primitive de l'unité.

On établit sans peine, par la théorie des involutions, que Φ est de genres

$$p_a = p_g = 20, \quad p^{(1)} = 73.$$

Le système canonique de Φ est découpé sur cette surface par les hyperquadriques de l'espace S_5.

Les courbes Γ_1, Γ_2 sont de degré —6 et correspondent respectivemnet aux sections de Φ par les hyperplans $x_4 = 0$, $x_5 = 0$.

Liége, le 12 janvier 1944.

M. HAYEZ, Imprimeur de l'Académie royale de Belgique, rue de Louvain, 112, Bruxelles.
(Domicile légal : rue de la Chancellerie, 4)