EXTRAIT DU *Bulletin de la Société royale des Sciences de Liége*.
Séance du 17 octobre 1940. — N^os 5 à 10,

Remarques sur les homographies cycliques du plan,

par LUCIEN GODEAUX, Membre de la Société.

Dans cette courte note, nous revenons sur un problème dont nous nous sommes occupé il y a quelques années : celui de la structure des points unis des homographies planes cycliques non homologiques ([2]). Nous considérons l'homographie

$$H = \begin{pmatrix} x_1 & \varepsilon x_2 & \varepsilon^\alpha x_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix}$$

([2]) Sur les homographies planes cycliques (*Mém. de la Soc. roy. des Sciences de Liége*, 1928, pp. 1-26); Sur les surfaces représentant les involutions planes engendrées par des homographies cycliques (*Idem*, 1930, pp. 1-21); Sur les courbes tracées sur la surface représentant l'involution engendrée par une homographie plane cyclique (*Idem*, 1931, pp. 1-14).

de période p, p étant un nombre premier supérieur à deux, ε une racine primitive d'ordre p de l'unité et α un nombre compris entre 1 et p. Cette homographie possède trois points unis : les sommets du triangle de référence.

Considérons le système linéaire $|C|$, le plus ample possible, dépourvu de points-base, formés des courbes C d'ordre p transformées en elles-mêmes par H. Les courbes C passant par un point uni de l'homographie y acquièrent un point multiple, les tangentes à ces courbes étant fixes et confondues avec les côtés du triangle de référence passant par le point considéré. Ce que nous appelons structure du point uni, c'est l'ensemble des points situés dans les domaines des différents ordres de ce point uni, appartenant à toutes les courbes C passant par ce point. Ces points forment différentes suites qui se terminent par des points unis parfaits pour l'involution plane d'ordre p engendrée par H. La détermination complète de ces suites est assez compliquée, nous l'exposerons dans un travail plus étendu. Dans cette note préliminaire, nous nous bornons à donner les conditions pour que ces suites soient au nombre de deux. Nous établissons précisément le théorème suivant :

La condition nécessaire et suffisante pour que les courbes C *passant par le point uni* O_1 (1, 0, 0) *de l'homographie* H, *aient en commun deux suites de points infiniment voisins successifs de* O_1, *est que l'on ait, soit* $p = a\alpha + 1$, *soit* $p = a\alpha + \alpha_1$, $\alpha = a_1\alpha_1 + 1$, $(\alpha_1 < \alpha)$. *Dans le premier cas, l'une des suites se compose de* $\alpha - 1$ *points multiples d'ordre* a, *l'autre de* $a(\alpha - 1)$ *points simples. Dans le second cas, l'une des suites se compose encore de* $\alpha - 1$ *points multiples d'ordre* a, *l'autre de* aa_1 *points multiples d'ordre* α_1.

Nous indiquons, pour terminer, la singularité de la surface représentant l'involution engendrée par H au point de diramation correspondant à O_1.

1. Considérons dans un plan l'homographie cyclique H d'équations

$$x'_1 : x'_2 : x'_3 = x_1 : \varepsilon x_2 : \varepsilon^\alpha x_3,$$

où ε est une racine primitive d'ordre p de l'unité, p étant un nombre premier supérieur à deux, α un entier compris entre 1 et p. L'homographie engendre une involution I_p, d'ordre p, ayant comme points unis les sommets du triangle de référence.

Désignons par $|C|$ le système linéaire, le plus ample possible, dépourvu de point-base, formé des courbes C d'ordre p transformées en elles-mêmes par l'homographie H. Ce système a pour équation

$$\Sigma \lambda_{hi} x_1^{i(\alpha-1)-(h-i)p} x_2^{hp-i\alpha} x_3^i = 0, \tag{1}$$

où h prend les valeurs 0, 1, ..., α et où, pour chaque valeur de h, i satisfait à la double inégalité

$$(h-1)\frac{p}{\alpha-1} \leq i \leq h\frac{p}{\alpha}.$$

Appelons C′ les courbes C passant par le point uni O_1 (1, 0, 0) de l'involution I_p. On obtient l'équation des courbes C′ en posant $\lambda_{00}=0$ dans l'équation (1).

En posant

$$\eta = \varepsilon^\alpha,$$

l'homographie H peut également être représentée par les équations

$$x'_1 : x'_2 : x'_3 = x_1 : \eta^\beta x_2 : \eta x_3,$$

β étant compris entre 1 et p.

L'équation du système $|C|$ s'écrira alors sous la forme

$$\Sigma \mu_{kj} x_1^{j(\beta-1)-(k-1)p} x_2^j x_3^{kp-j\beta} = 0, \tag{2}$$

h prenant les valeurs 0, 1, ..., β et j satisfaisant à la double inégalité

$$(k-1)\frac{p}{\beta-1} \leq j \leq k\frac{p}{\beta}.$$

Les courbes C′ seront obtenues en posant dans l'équation (2) $\mu_{00}=0$.

Les courbes C′ ont en O_1 un point singulier, à tangentes fixes, dont il importe d'examiner la structure. Il convient, dans ce but, d'exprimer β en fonction de α.

2. Posons

$$p = a\alpha + \alpha_1, \quad \alpha = a_1\alpha_1 + \alpha_2, \quad \cdots, \quad \alpha_{n-1} = a_n\alpha_n + \alpha_{n+1},$$

où

$$\alpha > \alpha_1 > \alpha_2 > \cdots > \alpha_n > \alpha_{n+1}.$$

Les nombres p et α étant premiers entre eux, on pourra supposer $\alpha_{n+1}=1$.

Posons encore

$$v = A_1\alpha_1 + A\alpha_2 = A_2\alpha_2 + A_1\alpha_3 = \cdots = A_n\alpha_n + A_{n-1};$$

on a

$$A = a, \quad A_1 = A a_1 + 1, \quad A_2 = A_1 a_2 + A, \cdots, A_n = A_{n-1} a_n + A_{n-2}.$$

Observons que l'on a

$$\left.\begin{array}{l} A\alpha \equiv -\alpha_1, \\ A_1\alpha \equiv \alpha_2, \\ A_2\alpha \equiv -\alpha_3, \\ \dots\dots\dots\dots\dots \end{array}\right\} \pmod{p}.$$

Par conséquent, si

1° $\qquad n = 2\nu, \qquad A_n\alpha \equiv -1, \qquad (\text{mod.}\ p);$

2° $\qquad n = 2\nu + 1, \qquad A_n\alpha \equiv 1, \qquad (\text{mod.}\ p).$

Dans le premier cas, on aura

$$\beta = p - A_n$$

et dans le second,

$$\beta = A_n.$$

On a $\alpha_n > 1$ et p est compris entre $A_n\alpha_n$ et $A_n\,(\alpha_n+1)$; on en conclut que dans le premier cas β est supérieur à A_n. On a donc

$$p = \beta + A_n, \qquad (\beta > A_n).$$

Dans le second cas, on a

$$p = \alpha_n\beta + A_{n-1}, \qquad (A_{n-1} < \beta).$$

3. Pour étudier la structure du point O_1, il faut déterminer, dans l'équation des courbes C', le terme qui contient x_1 à la plus haute puissance. Nous nous bornerons, dans cette note, à un cas simple, nous réservant de revenir sur le cas général dans un mémoire ultérieur plus étendu.

Dans le second de nos travaux cités, nous avons démontré que la condition nécessaire et suffisante pour que les courbes C' aient une seule suite de points multiples fixes, infiniment voisins successifs de O_1, le premier se trouvant sur la droite $x_3 = 0$, est que le terme qui, dans l'équation (1), où l'on a fait $\lambda_{00} = 0$, contient x_1 à la plus haute puissance, soit donné par $h = 1$, $i = a$. Ce terme est précisément

$$\lambda_{1a} x_1^{a(\alpha-1)} x_2^{\alpha_1} x_3^{a}.$$

Les courbes C' ont en O_1 la multiplicité $a + \alpha_1$, a tangentes étant confondues avec $x_3 = 0$ et α_1 avec $x_2 = 0$.

Si l'on effectue, sur les courbes C', α—1 fois la transformation

$$x_1' : x_2' : x_3' = x_1^2 : x_1x_2 : x_2x_3,$$

on obtient une équation dont tous les termes contiennent x_2^{p-a} en facteur. Après suppression de celui-ci, on obtient l'équation

$$x_1^{p-a}(\lambda_{10}x_2^a + \lambda_{11}x_2^{a-1}x_3 + \cdots + \lambda_{1a}x_3^a) + \cdots = 0,$$

les termes non écrits contenant x_1 à une puissance inférieure à p—a.

On en conclut que les courbes C' ont en commun α—1 points fixes, infiniment voisins successifs de O_1, le premier étant sur la droite $x_3 = 0$. Ces points, multiples d'ordre a pour les courbes, sont unis pour l'involution I_p et le dernier est uni parfait.

4. Supposons que les courbes C' aient en commun une seule suite de points infiniment voisins de O_1, le premier étant sur la droite $x_2 = 0$. Dans l'équation (2), où l'on a fait $\mu_{00} = 0$, le terme contenant x_1 à la plus haute puissance doit être donné par $k = 1$, j ayant la valeur maximum. On doit donc avoir

$$j(\beta - 1) = a(\alpha - 1), \quad j = \alpha_1, \quad p - j\beta = a.$$

Reportons-nous aux résultats du n° 2 et supposons en premier lieu que n soit pair. On a

$$p = j\beta + a = \beta + A_n, \quad j = 1, \quad A_n = a = A_0, \quad n = 0.$$

On en déduit

$$\alpha_1 = 1, \quad \beta = a(\alpha - 1) + 1, \quad p = a\alpha + 1.$$

Supposons maintenant que n soit impair; on a

$$p = \alpha_1\beta + a, \quad n = 1, \quad \beta = A_1 = aa_1 + 1, \quad \alpha_2 = 1, \quad \alpha = a_1\alpha_1 + 1.$$

Les courbes C' ont en commun β—1 points infiniment voisins successifs de O_1, le premier étant sur $x_2 = 0$. Ces points sont multiples d'ordre α_1 pour les courbes C' et sont unis pour l'involution I_p, le dernier étant uni parfait.

Effectuons, sur les courbes C', β—1 fois la transformation

$$x_1' : x_2' : x_3' = x_1^2 : x_2x_3 : x_1x_3.$$

Dans l'équation obtenue, on peut mettre en évidence x_3 à la puissance $a+(\beta-1)\alpha_1$; après réduction, l'équation obtenue s'écrit

$$\Sigma \mu_{kj} x_1^{p(\beta-k)} x_2^j x_3^{kp-j-a-\alpha_1(\beta-1)} = 0.$$

Les termes de puissance la plus élevée en x seront obtenus pour $k=1$; ce sont précisément les termes

$$x_1^{p(\beta-1)}[\mu_{10} x_3^{\alpha_1} + \mu_{11} x_3^{\alpha_1-1} x_2 + \cdots + \mu_{1\alpha_1} x_2^{\alpha_1}].$$

Voyons à quels termes de l'équation (1) les termes précédents correspondent. Si l'on applique la transformation précédente à l'équation (1), le terme correspondant aux valeurs h, i donne naissance à un terme contenant x_1 à la puissance

$$\beta[i(\alpha-1)-(h-1)p]+(\beta-1)i.$$

Cette puissance devant être égale à $p(\beta-1)$, on a

$$\beta[i(\alpha-1)-(h-1)p]+(\beta-1)i = p(\beta-1),$$

ou

$$i(\alpha\beta-1) = p(h\beta-1).$$

Lorsque l'on a $p=a\alpha+1$, on obtient les solutions $h=1$, $i=a$ et $h=\alpha$, $i=p$.

Lorsque l'on a

$$p = a\alpha+\alpha_1, \quad \alpha = a_1\alpha_1+1, \quad \beta = aa_1+1,$$

l'équation précédente s'écrit

$$a_1(i-ah) = h-1.$$

On obtient les solutions

$$h=1,\ i=a;\quad h=a_1+1,\ i=a+aa_1+1;\quad h=2a_1+1,$$
$$i=a+2(aa_1+1);\quad \cdots;\quad h=a_1\alpha_1+1=\alpha,\ i=a+\alpha_1(aa_1+1)=p.$$

5. Posons $p=2\nu+1$. Le système $|C|$ a la dimension $\nu+2$. Rapportons projectivement les courbes C aux hyperplans d'un espace linéaire $S_{\nu+2}$ à $\nu+2$ dimensions. Aux groupes de l'involution I_p correspondent les points d'une surface rationnelle normale Φ, dont les équations paramétriques peuvent s'écrire

$$\rho X_{hi} = x_1^{i(\alpha-1)-(h-1)p} x_2^{hp-i\alpha} x_3^i,$$

les X_{hi} étant les coordonnées projectives de $S_{\nu+2}$.

Au point O_1 correspond le point O_{00}, dont toutes les coordonnées sont nulles, sauf X_{00}. Ce point est multiple pour la surface Φ. D'après ce que nous avons établi dans nos travaux cités plus haut, le cône tangent à Φ au point O_{00} se compose de :

1° Si $p=a\alpha+1$, un cône d'ordre a, rationnel normal, d'équations

$$\left\| \begin{matrix} X_{10} & X_{11} & \cdots & X_{1a-1} \\ X_{11} & X_{12} & \cdots & X_{1a} \end{matrix} \right\| = 0, \qquad (3)$$

toutes les autres coordonnées, sauf X_{00}, étant nulles; un plan $O_{00}\,O_{1a}\,O_{ap}$ rencontrant le cône (3) suivant la droite $O_{00}\,O_{1a}$.

2° Si $p=a\alpha+\alpha_1$, $\alpha=a_1\alpha_1+1$, le cône (3) est un cône rationnel normal d'ordre α_1, d'équations

$$\left\| \begin{matrix} X_{1a} & X_{a_1+1,\, \beta+a} & \cdots & X_{(\alpha_1-1)a_1,\, (\alpha_1-1)\beta+a} \\ X_{a_1+1,\, \beta+a} & X_{2a_1+1,\, 2\beta+a} & \cdots & X_{\alpha_1 a_1+1,\, p} \end{matrix} \right\| = 0, \qquad (4)$$

toutes les autres coordonnées, sauf X_{00} étant nulles.

Les cônes (3) et (4) ont en commun la droite $O_{00}\,O_{1a}$.

La surface Φ possède un certain nombre de points doubles infiniment voisins successifs de O_{00}, dont le premier est sur la droite $O_{00}\,O_{1a}$. On peut déterminer ces points en considérant les courbes C' touchant en O_1 une droite distincte de $x_2=0$, $x_3=0$, et ainsi de suite, mais on peut également appliquer les résultats que nous avons obtenus antérieurement dans le cas des involutions cycliques appartenant à une surface algébrique [1].

Si $p=a\alpha+1$, la surface Φ possède $\frac{1}{2}\alpha-1$ points doubles biplanaires infiniment voisins successifs de O_{00}, le dernier étant ordinaire, si α est pair et $\frac{1}{2}(\alpha-1)-1$ points doubles biplanaires suivis d'un point double conique si α est impair.

Lorsque $p=a\alpha+\alpha_1$, $\alpha=a_1\alpha_1+1$, la surface Φ possède $\frac{1}{2}(a_1-1)$ points doubles biplanaires dont le dernier est ordinaire, infiniment voisins successifs de O_{00}, si a_1 est impair. Elle possède $\frac{1}{2}a_1-1$ points doubles biplanaires suivis d'un point double conique si a_1 est pair.

Liége, le 23 septembre 1940.

---

[1] Sur les surfaces multiples ayant un nombre fini de points de diramation (*Annales de l'École normale supérieure*, 1938, pp. 193-222).

Imprimerie M. HAYEZ, rue de Louvain, 112, Bruxelles
(Domicile légal : rue de la Chancellerie, 4)