GÉOMÉTRIE ALGÉBRIQUE.

Sur quelques involutions appartenant à la surface de Humbert généralisée,

par LUCIEN GODEAUX, Correspondant de l'Académie.

(*Première communication.*)

G. Humbert [1] et ensuite M. L. Remy [2] ont étudié la surface qui représente les couples de points d'une courbe de genre trois de telle sorte qu'à un point de la surface correspondent deux couples de points de la courbe, formant un groupe canonique de celle-ci. Humbert a construit un modèle projectif de cette surface en relation avec une surface de Kümmer; c'est une surface du sixième ordre ayant un point triple et un certain nombre de points doubles. Dans ses recherches sur les surfaces représentant les couples de points d'une courbe algébrique, M. Severi [3] a montré qu'un autre modèle projectif de cette surface est un plan triple. Nous avons [4] ensuite montré que l'on peut prendre comme modèle projectif de la surface de Humbert une surface d'ordre douze, normale, appartenant à un espace linéaire à six dimensions et possédant 28 points doubles coniques (modèle bicanonique de la surface). Plus tard [5], nous avons établi que cette surface est

(1) Sur une surface du sixième ordre liée aux tonctions abéliennes de genre trois. (*Journal de Liouville*, 1896, pp. 263-293.)

(2) Sur certaines surfaces algébriques liées aux fonctions abéliennes de genre trois (*Journal de Lionville*, 1908, pp. 1-37); Sur une classe de surfaces algébriques liées aux fonctions abéliennes de genre trois (*Annales de l'École norm. sup.*, 1909, pp. 193-258.)

(3) Sulle superficie che rappresentano le coppie di punti di una curva algebrica. (*Atti R. Accad. di Torino*, 1902-1903, t. 38, pp. 185-200.)

(4) Sur une superficie algébrique considérée par M. G. Humbert. (*Bull. des Sc. math.*, 1921, pp. 14-20.)

(5) Sur une involution rationnelle, douée de trois points de coïncidence, appartenant à une surface algébrique de genre trois. (*Bull. de l'Acad. roy. de Belgique*, Cl. des Sc., 1921, pp. 653-665, 694-702.)

l'intersection du cône projetant une surface de Veronese et d'une hypersurface cubique de l'espace à six dimensions. Cela étant, nous appelons surface de Humbert généralisée l'intersection, dans l'espace S_6, d'un cône V_3^4 projetant une surface de Veronese et d'une hypersurface cubique V_5^3, surface qui est, contrairement à la surface de Humbert, dépourvue en général de points doubles.

Nous nous proposons d'étudier quelques involutions cycliques appartenant à la surface de Humbert généralisée, involutions ne possédant qu'un nombre fini de points unis. Nous avons déjà rencontré une telle involution, d'ordre sept, rationnelle, dans un travail antérieur ([1]) et, dans le cas de la surface de Humbert ayant 28 points doubles, nous avons également étudié deux involutions du troisième ordre ([2]). Dans cette première note, nous considérons des involutions du troisième ordre également.

1. Désignons par x_1, x_2, x_3 les coordonnées projectives des points d'un plan ϖ et posons

$$X_{11} : X_{22} : X_{33} : X_{23} : X_{31} : X_{12} = x_1^2 : x_2^2 : x_3^2 : x_2x_3 : x_3x_1 : x_1x_2.$$

En éliminant les x et en interprétant les X comme coordonnées projectives d'un espace S_5, on obtient les équations

$$\left.\begin{array}{lll} X_{22}X_{33} - X_{23}^2 = 0, & X_{33}X_{11} - X_{31}^2 = 0, & X_{11}X_{22} - X_{12}^2 = 0, \\ X_{11}X_{23} - X_{12}X_{31} = 0, & X_{22}X_{31} - X_{12}X_{23} = 0, & X_{33}X_{12} - X_{23}X_{31} = 0 \end{array}\right\} \quad (1)$$

d'une surface de Veronese. Dans un espace S_6, ces équations représentent un cône V_3^4 projetant d'un point cette surface de Veronese.

([1]) Sur une involution rationnelle... (*loc. cit.*); Sur l'existence d'involutions rationnelles n'ayant qu'un nombre fini de points unis, appartenant à une surface algébrique (*Bull. des Sc. math.*, 1933, pp. 7-14).

([2]) Mémoire sur les surfaces algébriques liées à une courbe de genre trois (*Arxius de l'Institut de Ciencias de Barcelona*, 1917, pp. 89-107); Sur des surfaces algébriques liées à une courbe de genre trois (*Bull. de l'Acad. roumaine*, 1915-1916, pp. 271-274, 283-286, 373-378).

L'hypersurface cubique V_5^3 d'équation

$$X_0^3 + X_0^2\varphi_1 + X_0\varphi_2 + \varphi_3 = 0, \tag{2}$$

où φ_1, φ_2, φ_3 sont des formes algébriques en X_{11}, ..., X_{12} dont le degré est indiqué par l'indice, coupe le cône V_3^4 suivant une surface de Humbert généralisée F.

Nous désignerons par O_0 le point $X_{11}=0$, ..., $X_{12}=0$, sommet du cône V_3^4; par O_{ik} le point dont toutes les coordonnées sont nulles sauf X_{ik}.

Les cônes projetant de O_0 les coniques de la surface de Veronese [1] de $X_0=0$ coupent F suivant des courbes C, de genre quatre, qui sont les courbes canoniques de F. Cette surface a donc les caractères $p_a=p_g=3$, $p^{(1)}=4$. Les sections hyperplanes de F sont les courbes bicanoniques, de genre dix et d'ordre douze.

2. Ces points rappelés, considérons l'homographie cyclique de période trois

$$x_1' : x_2' : x_3' = x_1 : \varepsilon x_2 : \varepsilon^2 x_3 \qquad \left(\varepsilon = e^{\frac{2i\pi}{3}}\right)$$

du plan ϖ. Il lui correspond une homographie transformant en elle-même la surface de Veronese et qui est déterminée par l'homographie H d'équations

$$\frac{X_0'}{X_0} = \frac{X_{11}'}{X_{11}} = \frac{X_{22}'}{\varepsilon^2 X_{22}} = \frac{X_{33}'}{\varepsilon X_{33}} = \frac{X_{23}'}{X_{23}} = \frac{X_{31}'}{\varepsilon^2 X_{31}} = \frac{X_{12}'}{\varepsilon X_{12}}. \tag{H}$$

Cette homographie possède comme axes ponctuels le plan $O_0\,O_{11}\,O_{23}$ et les droites $O_{22}\,O_{31}$, $O_{33}\,O_{12}$.

Pour que la surface F soit transformée en elle-même par l'homographie H, il suffit de prendre pour l'hypersurface V_5^3 une variété transformée en elle-même par H. En tenant compte des équations (1), l'équation de V_5^3 peut s'écrire

$$\begin{gathered} X_0^3 + X_0^2(a_1X_{11} + a_2X_{23}) \\ + X_0(b_0X_{11}^2 + b_1X_{22}X_{33} + b_2X_{22}X_{12} + b_3X_{31}X_{33} + b_4X_{31}X_{12}) \\ + c_1X_{11}^3 + c_2X_{22}^3 + c_3X_{33}^3 \\ + X_{11}(d_1X_{22}X_{33} + d_2X_{22}X_{12} + d_3X_{31}X_{33} + d_4X_{31}X_{12}) \\ + X_{23}(f_1X_{22}X_{33} + f_2X_{22}X_{12} + f_3X_{31}X_{33} + f_4X_{31}X_{12}) = 0. \end{gathered}$$

Sur la surface F, l'homographie H détermine une involution I_3 d'ordre trois, n'ayant qu'un nombre fini de point unis, à savoir les trois points de rencontre de la droite $O_{11}\,O_0$ avec l'hypersurface V_5^3. Nous désignerons ces points par P_1, P_2, P_3.

3. Nous allons montrer que les points P_1, P_2, P_3 sont des points unis non parfaits de I_3. Il suffit d'ailleurs de le prouver pour l'un d'entre eux, P_1, que nous pouvons en outre sans restriction supposer être le point O_{11} (d'où l'hypothèse $c_1=0$).

L'espace tangent au point O_{11} à la variété V_3^4 est l'espace $O_0\,O_{11}\,O_{12}\,O_{31}$ et l'hyperplan tangent en ce point à la variété V_5^3 a pour équation $b_0\,X_0=0$. Le plan tangent en O_{11} à la surface F est donc le plan $O_{11}\,O_{12}\,O_{31}$; il est transformé en lui-même par H et possède les points unis O_{11}, O_{12}, O_{31}. Il en résulte que les trois points unis de l'involution I_3 sont des points unis non parfaits ([1]).

Le système canonique $|C|$ de F contient trois courbes unies pour H; ce sont les courbes situées dans les espaces

$$X_{11}=X_{12}=X_{31}=0,\quad X_{12}=X_{22}=X_{23}=0,\quad X_{31}=X_{23}=X_{33}=0.$$

Les deux dernières passent par les points unis de I_3; la première ne passe par aucun de ces points unis. Si nous désignons par Φ une surface image de l'involution I_3, cette surface possède donc une seule courbe canonique, de genre deux, qui correspond à la première des courbes canoniques C de F unie pour H.

Aux sections de F par les hyperplans passant par les axes $O_{22}\,O_{31}$, $O_{33}\,O_{12}$ de H correspondent sur Φ les courbes bicanoniques de cette surface. La surface Φ, qui est néces-

([1]) Voir nos Recherches sur les involutions douées d'un nombre fini de points de coïncidence, appartenant à une surface algébrique (*Bull. de la Soc. math. de France*, 1919, pp. 1-16) et nos Recherches sur les involutions cycliques appartenant à une surface algébrique (*Bull. de l'Acad. roy. de Belgique*, Cl. des Sc., 1930, pp. 450-467; 1931, pp. 1131-1150, 1356-1364; 1935, pp. 338-344).

sairement régulière comme F, a donc les genres $p_a = p_g = 1$, $P_2 = 3$, $p^{(1)} = 2$.

Désignons par C_1, C_2, C_3 les trois courbes canoniques de F qui sont unies pour H. Au système bicanonique de Φ correspond le système des courbes bicanoniques découpées sur F par les hyperplans

$$\lambda_0 X_0 + \lambda_1 X_{11} + \lambda_2 X_{23} = 0.$$

Ce système comprend les courbes $2\,C_1$ et $C_2 + C_3$.

Les hyperquadriques de S_6 unies pour H et passant par les axes $O_{22}\,O_{31}$, $O_{33}\,O_{12}$ de H découpent sur F les transformées des courbes 4-canoniques de Φ. Celles de ces hyperquadriques qui contiennent C_1 coupent encore F suivant les transformées des courbes tricanoniques de Φ. Le système tricanonique de Φ a le genre sept, le degré neuf et la dimension quatre ($P_3 = 5$).

Pour obtenir un modèle projectif de la surface Φ, rapportons projectivement ses courbes tricanoniques aux hyperplans d'un espace linéaire S_4 à quatre dimensions. Nous arrivons ainsi à une surface d'ordre neuf, que nous désignerons encore par Φ. Soient Γ_1, Γ_2, Γ_3 les courbes qui correspondent sur Φ aux courbes C_1, C_2, C_3. La courbe Γ_1 est la courbe canonique de Φ. Les sections hyperplanes de Φ contenant Γ_1 donnent les courbes bicanoniques de Φ; il en résulte que Γ_1 est une droite triple de Φ (1).

Aux courbes C_2, C_3 correspondent des cubiques planes elliptiques Γ_2, Γ_3, s'appuyant chacune en un point sur la droite Γ_1. Il existe, le long de chacune des courbes Γ_2, Γ_3, un hyperplan osculant la surface Φ en chaque point de rencontre. Les cubiques Γ_2, Γ_3 se rencontrent en trois

(1) La surface régulière de genre linéaire $p^{(1)} = 2$ et de genres $p_a = p_g = 1$ a été rencontrée par M. Enriques dans son travail : Le superficie algebriche di genere lineare $p^{(1)} = 2$ (*Rendiconti della R. Accad. dei Lincei*, février 1897, pp. 139-144); dans le cas général, elle est d'ordre neuf, appartient à un S_4 et possède une droite triple; ses sections hyperplanes sont des courbes tricanoniques.

points qui correspondent aux points unis P_1, P_2, P_3 et qui sont doubles biplanaires pour Φ.

4. Considérons maintenant, dans le plan ϖ, l'homologie de période trois

$$x_1' : x_2' : x_3' = \varepsilon x_1 : x_2 : x_3 ; \qquad \left(\varepsilon = e^{\frac{2i\pi}{3}}\right)$$

elle conduit à trois homographies de période trois de S_6, à savoir

$$X_0' : X_{11}' : X_{22}' : X_{33}' : X_{23}' : X_{31}' : X_{12}' = X_0 : \varepsilon^2 X_{11} : X_{22} : X_{33} : X_{23} : \varepsilon X_{31} : \varepsilon X_{12},$$

$$X_0' : X_{11}' : \cdots : X_{12}' = \varepsilon X_0 : \varepsilon^2 X_{11} : \cdots : \varepsilon X_{12}, \qquad (H_1)$$

$$X_0' : X_{11}' : \cdots : X_{12}' = \varepsilon^2 X_0 : \varepsilon^2 X_{11} : \cdots : \varepsilon X_{12}. \qquad (H_2)$$

Supposons que la variété V_5^3 soit unie pour la première de ces homographies. Il est facile de voir que l'involution du troisième ordre engendrée sur F par cette homographie possède une infinité de points unis, situés sur la courbe

$$X_0 = X_{11} = X_{31} = X_{12} = 0, \qquad X_{22}X_{33} - X_{23}^2 = 0, \qquad \varphi_3 = 0.$$

Nous laisserons cette involution de côté.

Supposons, au contraire, que la variété V_5^3 soit unie pour l'homographie H_1. Son équation s'écrit

$$X_0^3 + X_0^2\alpha_1(X_{31}, X_{12}) + X_0[X_{11}\varphi_1(X_{22}, X_{33}, X_{23}) + \alpha_2(X_{31}, X_{12})]$$
$$+ aX_{11}^3 + X_{11}X_{31}\varphi_1' + X_{11}X_{12}\varphi_1'' + \varphi_3 + \alpha_3 = 0,$$

où φ_1, φ_1', φ_1'', φ_3 sont des formes algébriques en X_{22}, X_{33}, X_{23}; α_1, α_2, α_3 des formes algébriques en X_{31}, X_{12}, dont le degré est indiqué par l'indice.

Les axes ponctuels de l'homographie H_1 sont :

a) le plan $O_{22}\, O_{33}\, O_{23}$;

b) le point O_{11};

c) le plan $O_0\, O_{31}\, O_{12}$.

L'involution I_3, engendrée sur F par l'homographie H_1, possède six points unis situés dans le premier des axes ponctuels de H_1; ces points sont donnés par les équations

$$X_0 = X_{11} = X_{31} = X_{12} = 0, \quad X_{22}X_{33} - X_{23}^2 = 0, \quad \varphi_3(X_{22}, X_{33}, X_{23}) = 0.$$

La surface F ne passe pas par le point O_{11} et ne rencontre pas le plan $O_0\,O_{31}\,O_{12}$; par conséquent, l'involution I_3 ne possède que les six points unis qui viennent d'être signalés.

5. Soit P un de ces points unis. On peut supposer sans restriction qu'il coïncide avec le point O_{22}; cela revient à supposer que le terme en X^3_{22} manque dans φ_3.

L'espace tangent le long de $O_0\,O_{22}$ au cône $V_3{}^4$ a pour équations

$$X_{11} = X_{33} = X_{31} = 0.$$

L'hyperplan tangent à la variété $V_5{}^3$ ou point O_{22} a une équation de la forme

$$a_{33}X_{33} + a_{23}X_{23} = 0.$$

Par conséquent, le plan tangent à F en O_{22} a pour équations

$$X_{11} = X_{33} = X_{31} = X_{23} = 0.$$

C'est donc le plan $O_{22}\,O_0\,O_{12}$. Dans ce plan, H_1 détermine une homologie de centre O_{22} et d'axe $O_0\,O_{12}$; par conséquent, le point P et par suite les six points unis de l'involution I_3 sont des points unis parfaits.

Dans le système canonique $|C|$ de F se trouvent une courbe unie isolée et un faisceau de courbes unies pour H_1. La courbe unie isolée, que nous désignerons par C_0, a pour équations

$$X_{11} = X_{12} = X_{31} = 0, \qquad X_{22}X_{33} - X_{23}^2 = 0, \qquad X_0^3 + \varphi_3 = 0.$$

Elle passe simplement par les six points unis de I_3 et il lui correspond donc, sur la surface Φ_1, image de l'involution I_3, une courbe rationnelle Γ_0.

Les autres courbes canoniques de F, unies pour H_1, courbes que nous désignerons par C_1, sont situées dans les espaces

$$X_{12} + \lambda X_{31} = 0, \qquad X_{22} + \lambda X_{23} = 0, \qquad X_{23} + \lambda X_{33} = 0.$$

Elles ne passent pas en général par les points unis de I_3

et il leur correspond sur Φ_1 des courbes Γ_1 de genre deux, rencontrant en un point variable la courbe Γ_0 et passant toutes par le point de Φ_1 qui correspond au groupe de I_3 situé sur la droite $O_0\, O_{11}$.

Aux courbes canoniques de Φ_1 doivent correspondre des courbes canoniques de F passant par les points unis (1). La surface Φ_1 aurait donc une courbe canonique rationnelle Γ_0; cette courbe est donc exceptionnelle. D'autre part, le genre arithmétique de Φ_1, calculé par la formule établie dans nos *recherches*, est égal à l'unité. On en conclut que la surface Φ_1 possède une courbe canonique d'ordre zéro.

6. Occupons-nous maintenant des courbes bicanoniques de la surface Φ_1. Il doit leur correspondre sur F des courbes bicanoniques $2C$ passant doublement par les six points unis de I_3.

Les systèmes d'hyperplans unis pour H_1 sont

$$\lambda_{22}X_{22} + \lambda_{33}X_{33} + \lambda_{23}X_{23} = 0 \quad \lambda_0 X_0 + \lambda_{31}X_{31} + \lambda_{12}X_{12} = 0, \quad X_{11} = 0.$$

Le second système découpe sur F des courbes passant simplement par les points unis de I_3. A ces courbes correspondent sur Φ_1 des courbes de genre deux formant un réseau de degré deux. Ces courbes ne rencontrent pas Γ_0. Parmi les courbes découpées par les hyperplans envisagés se trouvent les courbes $C_0 + C_1$; il en résulte que le réseau de courbes de genre deux qui vient d'être obtenu sur la surface Φ_1 contient les courbes Γ_1.

L'hyperplan $X_{11} = 0$ coupe la surface F suivant une courbe ayant des points doubles aux points unis de I_3 et précisément suivant la courbe C_0 comptée deux fois, ce qui confirme que la courbe Γ_0 est exceptionnelle.

Enfin, aux courbes découpées sur F par les hyperplans du premier système correspondent sur Φ_1 des courbes de genre quatre.

Ainsi donc, la surface Φ_1 est de genre un.

(1) Recherches sur les involutions... (*loc. cit.*).

7. Passons maintenant à l'étude d'une surface F unie pour l'homographie H_2. L'équation de V_5^3 s'écrit, dans ce cas,

$$\begin{aligned} X_0^3 + a_0 X_0^2 X_{11} + X_0 (a_1 X_{11}^2 + X_{31}\varphi_1 + X_{12}\varphi_1') \\ + a_2 X_{11}^3 + X_{11} X_{31} \varphi_1''' + X_{11} X_{12} \varphi_1'''' + \varphi_3 + \alpha_3 + 0, \end{aligned}$$

où les φ, α ont les mêmes significations que plus haut.

Les axes de l'homographie H_2 sont :

a) le plan $O_{22}\,O_{33}\,O_{23}$;
b) la droite $O_0\,O_{11}$;
c) la droite $O_{31}\,O_{12}$.

L'involution I_3, engendrée sur F par l'homographie H_2, possède :

1° six points unis dans le plan $O_{22}\,O_{33}\,O_{23}$, points unis donnés par

$$X_0 = X_{11} = X_{31} = X_{12} = 0, \qquad X_{22}X_{33} - X_{23}^2 = 0, \qquad \varphi_3 = 0;$$

2° trois points unis situés sur la droite $O_0\,O_{11}$ et donnés par

$$X_{22} = X_{33} = X_{23} = X_{31} = X_{12} = 0, \quad X_0^3 + a_0 X_0^2 X_{11} + a_1 X_0 X_{11}^2 + a_2 X_{11}^3 = 0.$$

La surface F ne rencontre pas la droite $O_{31}\,O_{12}$ et par suite l'involution I_3 possède exactement neuf points unis.

8. Envisageons un point uni de la première catégorie. Nous pouvons supposer que c'est le point O_{22}. Le plan tangent en ce point à la surface F a pour équations

$$X_{11} = 0, \qquad X_{33} = 0, \qquad X_{31} = 0, \qquad X_{23} = 0;$$

c'est donc le plan $O_{22}\,O_0\,O_{12}$. Dans ce plan, l'homographie H_2 détermine une homographie non homologique, ayant pour points unis O_{22}, O_0, O_{12}. Par conséquent, les six points unis de la première catégorie sont des points unis non parfaits de I_3.

Envisageons maintenant un des trois points unis de la seconde catégorie. Nous pouvons supposer sans restriction que ce point coïncide avec O_{11}, ce qui revient à supposer que, par un changement de coordonnées, on a fait disparaître le terme en X^3_{11} dans l'équation de V^3_5.

Le plan tangent à F au point O_{11} a pour équations

$$X_{22}=0, \qquad X_{33}=0, \qquad X_{23}=0, \qquad X_0=0\cdot$$

C'est donc le plan $O_{11}\,O_{31}\,O_{12}$, dans lequel H_2 détermine une homologie de centre O_{11} et d'axe $O_{12}\,O_{31}$. Les trois points unis de la seconde catégorie sont donc des points unis parfaits de l'involution I_3.

Désignons par Φ_2 une surface image de l'involution I_3. A une courbe canonique de Φ_2 correspond sur F une courbe canonique passant par les trois points unis parfaits de l'involution I_3. Les courbes canoniques de F unies pour I_3 sont :

1° une courbe isolée C_0 appartenant à l'espace

$$X_{11}=X_{12}=X_{31}=0$$

et dont les équations sont

$$X_{22}X_{33}-X_{23}^2=0, \qquad X_0^3+\varphi_3=0;$$

2° les courbes C_1, formant un faisceau ayant comme points-base les trois points unis parfaits de I_3 et appartenant aux espaces

$$X_{12}+\lambda X_{31}=0, \qquad X_{22}+\lambda X_{23}=0, \qquad X_{23}+\lambda X_{33}=0.$$

Aux courbes C_1 correspondent sur Φ_2 les courbes canoniques Γ_1 de cette surface. Ce sont des courbes elliptiques, formant un faisceau, et la surface Φ_2 a donc les caractères $p^{(1)}=1$, $p_a=p_g=2$.

La courbe C_0 passe par les six points unis non parfaits de I_3; il est aisé de voir qu'en chacun de ces points, la courbe touche une droite passant par O_0, donc unie pour H_2. Il en résulte qu'à la courbe C_0 correspond sur Φ_2 une courbe rationnelle unisécante des courbes Γ_1.

9. Il existe trois systèmes de courbes bicanoniques de F unies pour l'homographie H_2; ils sont découpés par les hyperplans

$$\lambda_{22}X_{22}+\lambda_{33}X_{33}+\lambda_{23}X_{23}=0,\quad \lambda_0X_0+\lambda_{11}X_{11}=0,\quad \lambda_{31}X_{31}+\lambda_{12}X_{12}=0.$$

Les hyperplans du premier système passent par l'espace $O_0\,O_{11}\,O_{12}\,O_{31}$ et contiennent les trois points unis parfaits de I_3. En un de ces points, le plan tangent à F passe par la droite $O_{12}\,O_{31}$; par conséquent, les hyperplans en question contiennent ces plans tangents et coupent F suivant des courbes ayant des points doubles aux trois points unis parfaits. Mais alors, ces courbes sont nécessairement décomposées en des courbes de courbes de C_1. En effet, les courbes C_1 ne rencontrent plus les courbes envisagées en dehors des points-base du faisceau $|C_1|$.

Les courbes bicanoniques de Φ_2 correspondent aux courbes découpées sur F par les hyperplans du premier système envisagé. Le système bicanonique de Φ_2 est donc composé au moyen du faisceau $|\Gamma_1|$, et pour cette surface on a $P_2=3$.

Considérons maintenant les courbes découpées sur F par le second système d'hyperplans

$$\lambda_0X_0+\lambda_{11}X_{11}=0.$$

Ces courbes passent par les six points unis non parfaits de l'involution I_3. Elles touchent, en chacun de ces points, une direction unie pour H_2 (passant par O_{12}). Les courbes qui leur correspondent sur Φ_2 sont donc de genre deux, formant un faisceau. Les courbes Γ_1 les rencontrent en deux points.

Les courbes découpées sur F par les hyperplans du troisième système

$$\lambda_{31}X_{31}+\lambda_{12}X_{12}=0$$

passent par les neuf points unis de l'involution I_3. En chacun de ces points elles ont un point simple. En un point uni parfait elles ont une tangente variable; en un point uni non parfait elles touchent la direction unie passant par O_0. A ces courbes correspondent sur Φ_2 des courbes elliptiques, formant un faisceau en rencontrant en un point les courbes Γ_1. Il en résulte que ces courbes sont décomposées en les courbes Γ_1 et la courbe Γ_0.

10. Nous avons donc rencontré trois espèces d'involutions cycliques d'ordre trois, n'ayant qu'un nombre fini de points unis, appartenant à la surface de Humbert généralisée. Les images de ces involutions sont respectivement :

1° une surface de genres $p_a = p_g = 1$, $P_2 = 3$, $P_3 = 5$, $p^{(1)} = 2$, ayant une courbe canonique isolée de genre deux;

2° une surface de genres un ($p_a = P_4 = 1$) représentable sur un plan double, puisqu'elle contient un réseau de courbes de genre deux;

3° une surface de genres $p_a = p_g = 2$, $P_2 = 3$, $P_3 = 4$, $p^{(1)} = 1$, dont les courbes canoniques sont les courbes elliptiques d'un faisceau au moyen duquel sont composés les systèmes pluricanoniques.

Liége, le 4 mars 1936.