

GÉOMÉTRIE ALGÈBRE

Sur quelques surfaces projectivement canoniques appartenant à des variétés de Segre,

par LUCIEN GODEAUX,
Membre de l'Académie.

M. Enriques a signalé à diverses reprises l'intérêt qu'il y a à déterminer des modèles projectifs de surfaces dont les sections hyperplanes constituent le système canonique ; ces surfaces sont souvent appelées surfaces canoniques. Nous proposons de les appeler *surfaces projectivement canoniques*, pour les distinguer des surfaces canoniques des variétés à trois dimensions.

Au cours de nos recherches sur les surfaces algébriques, nous avons rencontré des surfaces projectivement canoniques que nous avons signalées ⁽¹⁾. Nous nous proposons dans cette note d'en faire connaître trois nouvelles. Le théorème que nous établissons peut s'énoncer de la manière suivante :

Les surfaces-sections de :

- 1) *l'intersection avec deux hyperquadriques de la variété de Segre représentant les couples de points de deux plans, ou de*
- 2) *l'intersection avec une hyperquadrique de la variété*

⁽¹⁾ *Sur la construction d'une surface canonique* (BULLETIN DE LA SOC. ROY. DES SCIENCES DE LIÈGE, 1936, pp. 140-143) ; *Sur une surface canonique appartenant à la variété de Segre représentant les couples de points de deux plans* (BULLETIN DE L'ACAD. ROY. DE BELGIQUE, 1936, pp. 1223-1225) ; *Sur les surfaces algébriques dont les sections hyperplanes sont les courbes canoniques* (BULLETIN DE LA SOC. ROY. DES SCIENCES DE LIÈGE, 1937, pp. 92-96, 132-135, 154-155) ; *Construction de surfaces projectivement canoniques* (IDEM., 1939, pp. 348-350).

de Segre représentant les couples de points de deux espaces à trois dimensions, ou de

3) la variété de Segre représentant les couples de points de deux espaces linéaires à quatre dimensions, sont des surfaces projectivement canoniques.

Pour établir les deux premières parties de cet énoncé, nous nous appuyons sur un théorème de M. Enriques ⁽¹⁾ : La section par une hyperquadrique d'une variété à trois dimensions dont les sections hyperplanes sont des surfaces de genres un, est une surface projectivement canonique.

1. Considérons la variété de Segre V_4^6 représentant les couples de points de deux plans η_0, ζ_0 . Cette variété, du sixième ordre, appartient à un espace linéaire S_8 à huit dimensions et est normale. Elle contient deux séries ∞^2 de plans $|\eta|, |\zeta|$; un plan η représente les couples de points y, z , de η_0, ζ_0 dont l'un, y , est fixe; un plan ζ représente les couples de points dont l'un, z , est fixe. Deux plans η ou deux plans ζ ne se rencontrent pas; un plan η et un plan ζ ont un point commun.

Aux couples de points y, z dont l'un, y , décrit une droite du plan η_0 , l'autre étant quelconque dans le plan ζ_0 , correspondent sur V_4^6 une variété de Segre M_3^3 du troisième ordre, appartenant à un espace S_5 à cinq dimensions, variable dans un réseau $|M_3^3|$. De même, les couples y, z dont le second point z décrit une droite du plan ζ_0 , ont pour homologues sur V_4^6 les points d'une variété N_3^3 , analogue à M_3^3 , variable dans un réseau $|N_3^3|$. Deux variétés M_3^3 ont en commun un plan η et deux variétés N_3^3 un plan ζ . Une variété M_3^3 et une variété N_3^3 ont en commun une quadrique; les espaces à cinq dimensions auxquels ces variétés appartiennent

⁽¹⁾ F. ENRIQUES, *Lezioni sulla teoria delle superficie algebriche*, rédigées par L. CAMPEDELLI (Padova, Cedam, 1932). Voir p. 338.

ont donc en commun un espace à trois dimensions et par suite sont contenus dans un hyperplan de S_8 .

La section de la variété V_4^8 par une hyperquadrique V_7^2 de S_8 est une variété V_3^{12} du douzième ordre. M. Fano ⁽¹⁾ a montré que les sections hyperplanes de la variété V_3^{16} étaient des surfaces de genres un ($p_a = P_4 = 1$). On peut retrouver ce résultat de la manière suivante :

Soit Φ la surface section de la variété V_3^{12} par un hyperplan ξ . La section d'une variété M_3^3 par ξ est une surface cubique réglée normale (dans un espace S_1) et V_7^2 découpe, sur cette surface, une courbe Γ_1 d'ordre six et de genre deux. La série canonique de cette courbe est découpée par les génératrices rectilignes de la surface cubique qui la contient. Deux variétés M_3^3 ont en commun un plan η , rencontrant ξ suivant une droite commune aux deux variétés M_3^3 considérées. Les deux courbes Γ_1 correspondantes de Φ se coupent donc en deux points. Sur la surface Φ , les courbes Γ_1 , de genre deux, forment un réseau $|\Gamma_1|$; la série canonique g_2^1 d'une de ces courbes est donc découpée par les autres courbes du réseau; celui-ci est donc son propre adjoint. Il en résulte que la surface Φ est régulière et possède une courbe canonique d'ordre zéro; elle est donc bien de genres un ($p_a = P_4 = 1$).

Les variétés M_3^3 , N_3^3 découpent, sur Φ , des réseaux de courbes de genre deux, $|\Gamma_1|$, $|\Gamma_2|$. Ces variétés ont en commun une quadrique, donc une courbe Γ_1 et une courbe Γ_2 ont en commun quatre points. Le système des sections hyperplanes de la surface Φ comprend les courbes $\Gamma_1 + \Gamma_2$; ces sections sont donc de genre sept. D'ailleurs, la surface Φ est d'ordre douze et normale dans l'hyperplan ξ (espace linéaire à sept dimensions).

⁽¹⁾ *Su alcune varietà algebriche a tre dimensioni aventi curve-sezioni canoniche* (SCRITTI MATEMATICI OFFERTI A LUIGI BERZOLARI, Pavia, 1936, pp. 329-349).

2. Coupons la variété V_3^{12} par une seconde hyperquadrique V_7^{12} de S_8 ; nous obtenons une surface F d'ordre 24. Sur la variété V_3^{12} , nous avons

$$|F| = |2\Phi|.$$

Les adjointes du système $|\Phi|$ sont des surfaces d'ordre zéro, par conséquent, on a

$$|F'| = |\Phi|.$$

Les sections hyperplanes de la surface F sont donc des courbes canoniques de cette surface.

La courbe commune à une surface F et à une surface Φ est de genre 25, par conséquent, le genre linéaire de la surface F est $p^{(1)} = 25$; son système canonique est constitué par ses sections hyperplanes. La surface F est donc projectivement canonique.

La section d'une variété M_3^3 par une hyperquadrique est une surface du sixième ordre, rencontrée par un hyperplan suivant une courbe de genre deux et par suite par une hyperquadrique suivant une courbe de genre neuf. Les variétés M_3^3 de V_4^6 découpent donc sur F des courbes C_1 de genre neuf, d'ordre douze, formant un réseau $|C_1|$ de degré quatre. De même, les variétés N_3^3 découpent sur F un réseau $|C_2|$ de mêmes caractères que $|C_1|$.

Une courbe C_1 et une courbe C_2 se rencontrent en huit points et le système canonique $|C|$ de F est donné par

$$|C| = |C_1 + C_2|.$$

La section de la variété de Segre V_4^6 représentant les points de deux plans dans l'espace S_8 , par deux hyperquadriques, est une surface projectivement canonique de genres $p_a = p_g = 9$, $p^{(1)} = 25$.

3. Considérons maintenant la variété de Segre V_6^{20} représentant les couples de points de deux espaces

linéaires à trois dimensions η_0, ζ_0 . Cette variété est d'ordre vingt et appartient à un espace linéaire S_{15} ; elle est normale.

La variété V_6^{20} contient deux systèmes linéaires ∞^3 , $|\eta|, |\zeta|$ d'espaces linéaires à trois dimensions. Un espace η représente les couples de points y, z de η_0, ζ_0 dont l'un, y , est fixe; un espace ζ représente de même les couples y, z dont un point, z , est fixe. Deux espaces η , ou deux espaces ζ , ne se rencontrent pas; un espace η rencontre un espace ζ en un point.

Aux couples de points y, z dont l'un, y , appartient à un plan de η_0 , correspondent sur V_6^{20} les points d'une variété Segre M_5^{10} , d'ordre dix appartenant à un espace linéaire à onze dimensions. Cette variété est variable dans un système linéaire $|M_5^{10}|$ de dimension trois. De même, aux couples de points y, z dont l'un, z , décrit un plan, correspondent les points d'une variété de Segre N_5^{10} , analogue à M_5^{10} , engendrant un système linéaire $|N_5^{10}|$ de dimension trois.

Deux variétés M_5^{10} ont en commun une variété de Segre d'ordre quatre et de dimension quatre (représentant les points d'une droite de η_0 et de ζ_0); trois variétés M_3^{10} ont en commun un espace η . Les variétés N_5^{10} possèdent des propriétés analogues. Une variété M_5^{10} et une variété N_5^{10} ont en commun une variété de Segre V_4^6 , appartenant à un espace S_8 . Par conséquent, les espaces S_{11} contenant M_5^{10} et N_5^{10} appartiennent à un même hyperplan.

4. Représentons par y_0, y_1, y_2, y_3 les coordonnées d'un point y de η_0 et par z_0, z_1, z_2, z_3 celles d'un point z de ζ_0 . Posons ensuite

$$\rho X_{ik} = y_i z_k, \quad (i, k = 0, 1, 2, 3)$$

et interprétons les X comme coordonnées des points de l'espace S_{15} . Le lieu du point X est la variété de Segre

V_6^{20} , dont les équations s'obtiennent en écrivant que le déterminant

$$|X_{ik}|$$

est de caractéristique un.

A la section de V_6^{20} par un hyperplan

$$\Sigma \xi_{ik} X_{ik} = 0$$

correspondent les couples de points y, z conjugués par rapport à la réciprocité

$$\Sigma \xi_{ik} y_i z_k = 0.$$

Considérons la section de la variété V_6^{20} par un espace S_{11} à onze dimensions; nous obtenons ainsi une surface Φ d'ordre vingt. On va voir que cette surface est de genre un.

Soient

$$\Sigma \xi_{ik}^{(1)} X_{ik} = 0, \quad \Sigma \xi_{ik}^{(2)} X_{ik} = 0, \quad \Sigma \xi_{ik}^{(3)} X_{ik} = 0, \quad \Sigma \xi_{ik}^{(4)} X_{ik} = 0$$

les équations de quatre hyperplans indépendants passant par l'espace S_{11} . Les réciprocités correspondantes entre η_0, ζ_0 sont représentées par

$$\Sigma \xi_{ik}^{(1)} y_i z_k = 0, \quad \dots, \quad \Sigma \xi_{ik}^{(4)} y_i z_k = 0.$$

Les points y qui sont conjugués de points z par rapport à ces réciprocités, appartiennent à la surface

$$|\Sigma \xi_{ik}^{(l)} y_i| = 0, \quad (k = 0, 1, 2, 3; l = 1, 2, 3, 4). \quad (1)$$

C'est une surface du quatrième ordre en général dépourvue de points multiples et par conséquent de genres un ($p_a = P_4 = 1$); elle est par construction en correspondance birationnelle avec Φ et par suite cette surface est à son tour de genres un.

La surface Φ , de genres un, appartient à un espace linéaire à onze dimensions et est d'ordre vingt; elle est par conséquent normale et ses sections hyperplanes

sont de genre onze. On va d'ailleurs retrouver ce résultat autrement.

Considérons la section de la surface Φ par l'hyperplan

$$\Sigma \xi_{ik}^{(0)} X_{ik} = 0. \quad (2)$$

Sur la surface (1), il correspond aux points de cette section les points y , satisfaisant aux équations

$$\| \Sigma_i \xi_{ik}^{(l)} y_i \| = 0, (k = 0, 1, 2, 3; l = 0, 1, 2, 3, 4). \quad (3)$$

Supposons en particulier que l'hyperplan (2) ait pour équation

$$\Sigma \xi_i \xi_k' X_{ik} = 0$$

et corresponde donc à une réciprocité dégénérée

$$(\Sigma \xi_i y_i) (\Sigma \xi_k' z_k) = 0.$$

Les équations (3) s'écrivent

$$\left\| \begin{array}{ccccc} \Sigma \xi_{i0}^{(1)} y_i & \Sigma \xi_{i0}^{(2)} y_i & \Sigma \xi_{i0}^{(3)} y_i & \Sigma \xi_{i0}^{(4)} y_i & \xi'_0 \Sigma \xi_i y_i \\ \Sigma \xi_{i1}^{(1)} y_i & \text{»} & \text{»} & \text{»} & \xi'_1 \Sigma \xi_i y_i \\ \Sigma \xi_{i2}^{(1)} y_i & \text{»} & \text{»} & \text{»} & \xi'_2 \Sigma \xi_i y_i \\ \Sigma \xi_{i3}^{(1)} y_i & \text{»} & \text{»} & \text{»} & \xi'_3 \Sigma \xi_i y_i \end{array} \right\| = 0;$$

ces équations représentent la section de la surface (1) par le plan

$$\Sigma \xi_i y_i = 0$$

et, en supprimant dans la dernière colonne le facteur $\Sigma \xi_i y_i$, une courbe du sixième ordre et de genre trois tracée sur la surface (1). On voit donc que la courbe (3) dégénère en deux courbes de genre trois, se rencontrant en six points; la courbe (3) est donc de genre onze et il en est par conséquent de même des sections hyperplanes de la surface Φ .

Les variétés M_5^{10} , N_5^{10} coupent la surface Φ suivant des courbes d'ordre dix Γ_1 , Γ_2 , engendrant des systèmes linéaires de dimension trois, $|\Gamma_1|$, $|\Gamma_2|$, et par suite de genre trois. Les courbes Γ_1 correspondent aux sections planes de la surface (3) et les courbes Γ_2 aux sextiques

gauches de genre trois dont l'une a été rencontrée plus haut. Les sections hyperplanes Γ de Φ sont données par

$$|\Gamma| = |\Gamma_1 + \Gamma_2|.$$

La variété V_6^{20} de Segre de S_{15} , représentant les couples de points de deux espaces à trois dimensions, est coupée par les espaces à onze dimensions suivant des surfaces de genres un ($p_a = P_4 = 1$), normales, contenant deux systèmes linéaires de courbes de genre trois.

5. Coupons la variété V_6^{20} par un espace à douze dimensions S_{12} ; nous obtenons une variété V_3^{20} dont les sections hyperplanes sont des surfaces Φ de genres un. Une hyperquadrique V_{11}^2 de S_{12} coupe V_3^{20} suivant une surface F d'ordre quarante. Nous avons

$$|F| = |2\Phi|,$$

et les courbes canoniques des surfaces Φ étant d'ordre zéro, le système adjoint de Φ est formé de surfaces d'ordre zéro. On a donc

$$|F'| = |\Phi|$$

et les sections hyperplanes de F sont des courbes canoniques de cette surface.

Une section hyperplane d'une surface Φ ayant le genre 11, les sections hyperplanes d'une surface F ont le genre 41. La surface F est projectivement canonique et les genres $p^{(1)} = 41$, $p_a = p_g = 13$.

Les variétés M_5^{10} coupent la surface F suivant des courbes d'ordre vingt et de genre quinze, formant un système linéaire $|C_1|$ de degré huit et de dimension trois. De même, les variétés N_5^{10} découpent sur la surface F un système linéaire de courbes $|C_2|$ de mêmes caractères que $|C_1|$. Le système canonique $|C|$ des sections hyperplanes de F donne

$$|C| = |C_1 + C_2|$$

La section par un espace linéaire à douze dimensions de l'intersection de la variété de Segre V_6^{20} de S_{15} , représentant les couples de points de deux espaces à trois dimensions, et d'une hyperquadrique, est une surface projectivement canonique de genres $p^{(1)} = 41$, $p_a = p_g = 13$.

6. Nous allons maintenant nous occuper de la variété de Segre V_8^{70} , d'ordre 70, appartenant à un espace S_{24} à 24 dimensions, normale, représentant les couples de points de deux espaces linéaires à quatre dimensions η_0 , ζ_0 .

L'extension des propriétés rappelées précédemment pour les variétés V_4^6 , V_6^{20} , est immédiate. La variété V_8^{70} possède deux systèmes linéaires ∞^4 , $|\eta|$, $|\zeta|$, d'espaces linéaires à quatre dimensions, deux espaces du même système ne se rencontrant pas, mais deux espaces de systèmes différents étant unisécants. Il existe sur la variété V_8^{70} deux systèmes linéaires $|M_7^{35}|$, $|N_7^{35}|$ de variétés de Segre, représentant les couples de points de deux espaces linéaires : l'un à trois dimensions, l'autre à quatre dimensions. Ces systèmes linéaires ont la dimension quatre. Deux variétés du système $|M_7^{35}|$ ont en commun une variété de Segre d'ordre quinze, représentant les couples de points d'un plan et de ζ_0 ; trois variétés M_7^{35} ont en commun une variété de Segre d'ordre cinq, représentant les couples de points d'une droite et de ζ_0 ; enfin, quatre variétés M_7^{35} ont en commun un espace η . On a des propriétés analogues pour $|N_7^{35}|$. Une variété M_7^{35} et une variété N_7^{35} ont en commun une variété de Segre V_6^{20} , représentant les couples de point de deux espaces à trois dimensions ; ces deux variétés constituent une section hyperplane de V_8^{70} .

Désignons par y_0, y_1, y_2, y_3, y_4 les coordonnées d'un point y de η_0 , par $z_0, z_1, \dots, z_4$ celles d'un point z de ζ_0 . Posons

$$\rho X_{ik} = y_i z_k$$

et interprétons les X comme coordonnées des points de l'espace S_{24} . Les équations de V_8^{70} s'obtiennent en écrivant que le déterminant

$$|X_{ik}|$$

a la caractéristique un.

A la section de V_8^{70} par l'hyperplan

$$\sum \xi_{ik} X_{ik} = 0,$$

correspond la réciprocité

$$\sum \xi_{ik} y_i z_k = 0$$

entre les espaces η_0, ζ_0 .

7. Considérons la variété V_3^{70} , section de la variété V_8^{70} par un espace S_{19} à 19 dimensions. Soient

$$\sum \xi_{ik}^{(0)} X_{ik} = 0, \sum \xi_{ik}^{(1)} X_{ik} = 0, \dots, \sum \xi_{ik}^{(4)} X_{ik} = 0$$

cinq hyperplans indépendants passant par S_{19} ; les réciprocités correspondantes entre η_0 et ζ_0 sont

$$\sum \xi_{ik}^{(0)} y_i z_k = 0, \sum \xi_{ik}^{(1)} y_i z_k = 0, \dots, \sum \xi_{ik}^{(4)} y_i z_k = 0.$$

Le lieu des points y appartenant à des couples y, z représentés par les points de V_3^{70} , est

$$|\sum_i \xi_{i0}^{(l)} y_i \quad \sum_i \xi_{i1}^{(l)} y_i \quad \dots \quad \sum_i \xi_{i4}^{(l)} y_i| = 0, \quad (l = 0, 1, \dots, 4). \quad (1)$$

Ce lieu est donc une hypersurface du cinquième ordre de l'espace η_0 , en général dépourvue de points multiples et par conséquent dont la surface canonique est d'ordre zéro. Il en résulte que sur cette variété, chaque système linéaire de surfaces est son propre adjoint. La correspondance entre la variété V_3^{70} et l'hypersurface (1) étant biunivoque sans exception, tout système linéaire de surfaces tracées sur V_3^{70} est également son propre adjoint. Il en est ainsi en particulier pour le système $|F|$ des sections hyperplanes de V_3^{70} . Les surfaces F sont donc

projectivement canoniques et ont les caractères $p^{(1)} = 71$, $p_a = p_g = 19$.

Soit

$$\sum \xi_{ik}^{(5)} X_{ik} = 0$$

l'équation d'un hyperplan ne passant pas par S_{10} . A la surface F section de V_3^{70} par cet hyperplan correspond dans η_0 la surface d'équations

$$\| \sum_i \xi_{i0}^{(l)} y_i \quad \sum_i \xi_{i1}^{(l)} y_i \quad \dots \quad \sum_i \xi_{i4}^{(l)} y_i \| = 0, \quad (l = 0, 1, \dots, 5).$$

C'est une surface d'ordre quinze, dont les sections hyperplanes ont le genre 26 (*). A une section hyperplane de la surface (2) correspond sur la surface F considérée, une courbe C_1 découpée sur cette surface par une variété M_7^{35} . Les courbes C_1 sont d'ordre 35 et forment un système linéaire de dimension quatre; le degré est égal à quinze. De même, les variétés N_7^{35} découpent sur F un système linéaire de courbes $|C_2|$, d'ordre 35, de genre 26, de degré 15 et de dimension quatre. Une courbe C_1 et une courbe C_2 se rencontrent en 20 points.

Désignons par C les sections hyperplanes de la surface F considérée. On a

$$|C| = |C_1 + C_2|$$

La section, par un espace linéaire à 18 dimensions, de la variété de Segre V_8^{70} de S_{24} représentant les couples de points de deux espaces linéaires à quatre dimensions, est une surface projectivement canonique de genres $p^{(1)} = 71$, $p_a = p_g = 19$.

Liège, le 27 janvier 1942.

(1) Voir M. STUYVAERT, *Cinq Etudes de Géométrie analytique* (MÉMOIRES DE LA SOCIÉTÉ ROY. DES SCIENCES DE LIÈGE, 1907). Voir pp. 37, 38.