Bulletin de la Classe des sciences

Étude de quelques surfaces et variétés algébriques

Lucien Godeaux

Résumé
Étude de surfaces et de variétés algébriques à trois dimensions tracées sur la variété lieu des droites s'appuyant sur deux variétés de Veronese situées dans des espaces ne se rencontrant pas.

GÉOMÉTRIE ALGÉBRIQUE

Étude de quelques surfaces et variétés algébriques

par Lucien GODEAUX
Membre de l'Académie

Résumé. — Étude de surfaces et de variétés algébriques à trois dimensions tracées sur la variété lieu des droites s'appuyant sur deux variétés de Veronese situées dans des espaces ne se rencontrant pas.

Nous avons, à plusieurs reprises, utilisé la variété lieu des droites s'appuyant sur deux variétés de Veronese situées dans des espaces ne se rencontrant pas (1). Cette variété représente les couples de points déterminés dans un certain espace linéaire par une homographie biaxiale harmonique. Cela nous a permis de construire des surfaces et des variétés satisfaisant à certaines conditions. Dans cette note, nous nous proposons d'utiliser le même procédé pour construire différentes surfaces et variétés algébriques à trois dimensions, notamment des surfaces dont le système des sections hyperplanes coïncide avec le système canonique ou bicanonique et des variétés à trois dimensions dont les systèmes canonique et pluricanoniques sont d'ordre zéro.

Après avoir traité des variétés lieu des droites rencontrant deux variétés de Veronese dans le cas général, nous considérions deux cas particuliers et passons ensuite à un cas général.

(1) *Construction de quelques surfaces algébriques projectivement canoniques* (Bulletin de l'Académie roy. de Belgique, 1970, pp. 871-885). *Une variété à trois dimensions à sections hyperplanes de bigenre un* (Idem, 1974, pp. 380-386).

1. Considérons dans un espace S_r à $r = m + n + 1$ dimensions, une homographie biaxiale harmonique H d'équations

$$\rho y'_i = y_i, \qquad (i = 0,1,\ldots,m)$$
$$\rho z'_k = -z_k. \quad (k = 0,1,\ldots,n)$$

Les axes de cette homographie sont l'espace σ_1 à m dimensions, d'équations $z_0 = z_1 = \ldots = z_n = 0$, et un espace σ_2 à n dimensions d'équations $y_0 = y_1 \ldots = y_m = 0$.

Les hyperquadriques de S_r transformées en elles-mêmes par l'homographie H forment deux systèmes linéaires. Les hyperquadriques Q_1 du premier système ont une équation de la forme

$$\varphi_1(y_0,y_1,\ldots,y_m) + \varphi_2(z_0,z_1,\ldots,z_n) = 0,$$

où φ_1 et φ_2 sont des formes algébriques du second degré par rapport à leurs arguments. Le système $| Q_1 |$ a la dimension

$$R = \frac{1}{2}(m + 1)(m + 2) + \frac{1}{2}(n + 1)(n + 2) - 1.$$

Le second système, $| Q_0 |$, a une équation de la forme

$$\varphi(y_0,y_1,\ldots,y_m; z_0,z_1,\ldots,z_n) = 0,$$

où φ est une forme bilinéaire de ses arguments. Ce système a la dimension $(m + 1)(n + 1) - 1$. Les hyperquadriques Q_0 passent par les axes σ_1, σ_2, de H.

Rapportons projectivement les hyperquadriques Q_1 aux hyperplans d'un espace linéaire S_R à R dimensions en posant

$$\rho Y_{ik} = y_i y_k, \qquad (i, k = 0,1,\ldots,m)$$
$$\rho Z_{ik} = z_i z_k. \qquad (i, k = 0,1,\ldots,n)$$

L'élimination des y, z nous donne les équations obtenues en écrivant que les déterminants

$$| Y_{ik} |, | Z_{ik} |$$

sont de caractéristique un.

Dans l'espace Σ_1 ($Z_{ik} = 0$), les premières équations représentent une variété de Veronese, obtenue en rapportant projectivement les hyperquadriques de σ_1 aux hyperplans de l'espace Σ_1, à

$(m + 1)(m + 2) : 2 - 1$ dimensions. Cette variété, Φ_1, a m dimensions et est d'ordre 2^m. De même, les secondes équations représentent une variété de Veronese Φ_2 située dans un espace Σ_2 à $(n+1)(n+2) : 2 - 1$ dimensions. Elle est d'ordre 2^n et a n dimensions. Les espaces Σ_1 et Σ_2, dont les équations sont respectivement $Z_{ik} = 0$ et $Y_{ik} = 0$, appartiennent à l'espace S_R et ne se rencontrent pas.

Aux couples de points de l'involution engendrée par l'homographie H dans S_r, correspondent les points de la variété W intersection du cône projetant Φ_1 de Σ_2 et du cône projetant Φ_2 de Σ_1. C'est une variété lieu des droites s'appuyant sur les variétés Φ_1 et Φ_2. Elle est d'ordre 2^{m+n} et a $r = m + n + 1$ dimensions. Aux groupes de l'involution situés sur une droite s'appuyant sur σ_1 et σ_2 correspondent les points d'une droite s'appuyant sur Φ_1 et Φ_2.

La variété Φ_1 est multiple d'ordre 2^n pour la variété W et la variété Φ_2 est multiple d'ordre 2^m.

2. Un hyperplan de S_r a pour équation

$$f_1(y_0, y_1, \ldots, y_m) + f_2(z_0, z_1, \ldots, z_n) = 0.$$

L'homographie H lui fait correspondre l'hyperplan

$$f_1 - f_2 = 0.$$

En multipliant ces équations membre à membre, nous obtenons l'équation

$$f_1^2 - f_2^2 = 0,$$

c'est-à-dire une équation linéaire en Y_{ik} et Z_{ik}. Donc, à une hyperplan ξ de S_r, correspond dans S_R l'intersection de la variété W par un hyperplan ξ'.

Faisons variété l'hyperplan ξ d'une manière continue en le faisant tendre vers un hyperplan ξ_1 passant par σ_1. A l'hyperplan ξ_1 correspond la section de W par un espace linéaire ξ'_1 passant par Σ_1. A l'hyperplan ξ correspond la variété (W, ξ'_1) comptée deux fois, car ξ_1 est transformé en soi par H. On a donc

$$2(W, \xi'_1) \equiv (W, \xi).$$

Faisons maintenant tendre ξ vers un hyperplan ξ_2 passant par σ_2 et soit ξ'_2 l'hyperplan qui correspond à ξ_2 dans S_R. Nous avons de même

$$2(W,\xi'_2) \equiv (W,\xi'),$$

c'est-à-dire

$$2(W,\xi'_1) \equiv 2(W,\xi'_2).$$

On en conclut que le long des variétés qui correspondent sur W aux hyperplans ξ_1, ξ_2 il y a un hyperplan touchant W en tout point d'intersection.

Ce raisonnement peut s'étendre. Considérons une hyperquadrique Q de S_r. Son équation peut se mettre sous la forme

$$Q_1 + Q_0 = 0.$$

L'homographie H lui fait correspondre l'hyperquadrique

$$Q_1 - Q_0 = 0.$$

En multipliant ces équations membre à membre, on obtient l'équation

$$Q_1^2 - Q_0^2 = 0,$$

qui s'exprime comme une forme quadratique de Y_{ik} et de Z_{ik}. Soit Q′ l'hyperquadrique de S_R représentée par cette équation. A une quadrique Q correspond dans W l'intersection (W,Q′) de cette variété par l'hyperquadrique Q′.

A une hyperquadrique Q_1 correspond dans S_R un hyperplan Q_1 et à une hyperquadrique Q_0 une hyperquadrique Q'_0 dont l'équation s'obtient en introduisant les Z_{ik} dans l'équation $Q_0^2 = 0$.

Faisons varier Q d'une manière continue en la faisant tendre vers une hyperquadrique Q_1. Il correspond à cette hyperquadrique la section hyperplane (W,Q'_1) comptée deux fois.

Si au contraire Q tend vers une hyperquadrique Q_0, il correspond à (W,Q′) la variété (W,Q_0) comptée deux fois. On a donc

$$(W,Q') \equiv 2(W,Q'_1) \equiv 2(W,Q'_0).$$

Il y a par suite une hyperquadrique Q'_0 de S_R qui touche W en tout point d'intersection.

3. Supposons $m = 3, n = 2$, donc $r = 6$ et $R = 15$. La variété W, d'ordre $2^5 = 32$, appartient à un espace S_{15} à quinze dimensions.

Considérons dans S_6 la surface F intersection de quatre hyperquadriques Q_1. Soit F′ la surface qui lui correspond sur W. Aux quatre hyperquadriques Q_1 correspondent quatre hyperplans de S_{15} donc la surface F′ appartient à l'espace S_{11} à onze dimensions intersection de ces quatre hyperplans. Sur F, l'homographie H engendre une involution I privée de points unis.

On sait que le système canonique de F est découpé par les hyperplans de S_6. Ce système canonique contient deux systèmes linéaires appartenant à l'involution I. L'un, (F,ξ_1) est découpé par les hyperplans ξ_1 passant par σ_1. Il a la dimension deux. L'autre (F,ξ_2) est découpé par les hyperplans ξ_2 passant par σ_2, il a la dimension trois. Nous avons démontré ([2]) que le transformé sur F du système canonique de F′ était celui des systèmes (F,ξ_1), (F,ξ_2) qui a la dimension minimum, c'est-à-dire actuellement le système $|(F,\xi_1)|$.

A l'hyperplan ξ_1 correspond dans S_{15} et par suite dans S_{11} un espace linéaire passant par Σ_1 et cet espace linéaire touche la section de W par S_{11} en tout point d'intersection. Le système canonique de F′ est donc formé par les courbes suivant lesquelles des hyperplans passant par Σ_1 touchent W dans S_{11}. Le genre arithmétique de F′ est $p_a = 3$ et comme la surface F est régulière, il en est de même de F′ dont le genre géométrique est donc $p_g = 3$.

L'ordre de F étant 16, le degré du système canonique (F',ξ_1) est égal à huit. Le genre linéaire de F′ est égal à neuf.

Aux courbes (F,ξ_2) correspondent sur F′ des courbes (F',ξ'_2) le long desquelles un hyperplan de S_{11} touche la surface F′. Ces courbes forment un système de dimension trois, de genre neuf et de degré huit. Elles sont d'ordre 16.

On a

$$2(F',\xi'_1) \equiv 2(F',\xi'_2).$$

Aux courbes canoniques de F′, comptées deux fois, correspondent sur F les sections de la surface par les hyperplans ξ_1 comptés deux fois, c'est-à-dire par une hyperquadrique dégénérée de S_6. Les hyperquadriques de S_5 découpent sur F le système bicanonique de cette

([2]) *Sur une propriété des correspondances rationnelles entre deux variétés algébriques* (Bulletin des Sciences Mathématiques, 1938, pp. 291-297).

surface et forment un système de dimension onze. A ces courbes correspondent sur F′ le système bicanonique de la surface, qui est donc découpé par les hyperplans de S_{15}, c'est-à-dire par les hyperplans de S_{11}.

On a d'ailleurs

$$P_2 = p_a + p^{(1)} = 3 + 9 = 12.$$

Le système bicanonique de la surface F′ *coïncide avec le système de ses sections hyperplanes.*

4. Considérons maintenant la surface F_0 intersection de trois hyperquadriques Q_1 et d'une hyperquadrique Q_0. L'involution I engendrée sur cette surface par H possède huit points unis situés dans l'espace σ_1. Soit F'_0 la surface qui correspond à F_0 dans la variété W. Cette surface appartient à un espace linéaire à 12 dimensions, S_{12}.

Le système canonique de F_0 contient deux systèmes linéaires appartenant à I. L'un, découpé par les hyperplans ξ_1 passant par σ_1, a la dimension deux et ses courbes passent par les points unis de l'involution I. L'autre a la dimension trois et ses courbes sont découpées par les hyperplans ξ_2 passant par σ_2.

Le genre arithmétique de F_0 étant $p_a = 7$, le genre arithmétique p'_a de F'_0 est donné par la relation

$$12(p_a + 1) = 2.12(p'_a + 1) - 3.8,$$

d'où $p'_a = 4$.

On sait d'ailleurs que le transformé du système canonique de F_0 a pour homologue sur F_0 un système linéaire qui ne passe pas par les points unis de l'involution. Par conséquent, les transformées des courbes canoniques de F'_0 sont découpées sur F par les plans ξ_2. Le système canonique de F'_0 est donc le système des courbes (F'_0, ξ'_2) le long desquelles un hyperplan touche la section de W par S_{11}.

Le degré du système (F'_0, ξ'_2) étant égal à huit, le genre linéaire de F'_0 est $p^{(1)} = 9$.

Aux courbes (F'_0, ξ'_2) comptées deux fois correspondent sur F_0 les sections par les hyperplans ξ_2 comptés deux fois, c'est-à-dire par les hyperquadriques Q_1 dégénérées. Il en résulte que le système bicanoniquc dc F'_0 cst celui de ses sections hyperplanes. On a donc $P_2 = 12$.

D'ailleurs, on a

$$P_2 = p_a + p^{(1)} = 12.$$

Un hyperplan ξ_1 tangent à F_0 en un point uni coupe σ_2 suivant une droite à laquelle correspond une conique γ de Φ_2. Le cône tangent à F'_0 au point de diramation correspondant projette cette conique et la surface F'_0 contient donc huit points doubles coniques. Chacun de ces points est équivalent, au point de vue des transformations birationnelles, à une courbe rationnelle de degré virtuel -2. Soient $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_8$ les courbes rationnelles auxquels sont équivalents les huit points doubles de F'_0. On a

$$2(F'_0,\xi'_2) \equiv 2(F'_0,\xi'_1) + \varphi_1 + \varphi_2 + \cdots + \varphi_8.$$

car il y a un hyperplan de S_{11} touchant W le long d'une courbe (F'_0,ξ'_1).

Le système bicanonique de la surface F'_0 *coïncide avec le système des sections hyperplanes.*

5. La variété à trois dimensions de S_6, intersection de trois hyperquadriques Q_1, a pour homologue sur W une variété V′ à trois dimensions située dans un espace S_{12}. Nous désignerons par W′ la section de W par cet espace.

Les sections hyperplanes de V′ dans W′ sont des surfaces F′. Le système adjoint à $| F' |$ doit découper sur ces surfaces les courbes canoniques (F',ξ'_1). A ce système correspond sur V le système (F,ξ_1). Le système canonique de (F,ξ'_1) est découpé par les hyperquadriques Q_1 (ne contenant pas F), donc le système qui contient les surfaces (V,ξ_1) est découpé par des hypersurfaces cubiques transformées en elles-mêmes par H.

Ce système a pour équation

$$\psi(y_0,y_1,y_2,y_3) + y_0\psi_0(z) + y_1\psi_1(z) + y_2\psi_2(z) + y_3\psi_3(z) = 0,$$

où ψ est une forme cubique et ψ_0, ψ_1, ψ_2, ψ_3 des formes quadratiques de leurs arguments.

Cette équation peut s'écrire sous la forme,

$$y_0\chi_0(Y,Z) + y_1\chi_1(Y,Z) + y_2\chi_2 + y_3\chi_3(Y,Z) = 0.$$

En élevant les deux membres de cette équation au carré, on obtient l'équation

$$\Sigma Y_{ik}\chi_i(Y,Z)\chi_k(Y,Z) = 0,$$

où $\chi_0, \chi_1, \chi_2, \chi_3$ sont des formes linéaires en Y, Z.

L'adjoint au système $| F' |$ sur V' est donc découpé par des variétés cubiques.

En tenant compte des hyperquadriques Q_1 passant par V, le nombre de termes de l'équation précédente est 32. Le trigenre d'une surface F' est donc $P_3 = 32$, nombre que l'on obtient d'ailleurs en utilisant la formule donnant le trigenre en fonction du bigenre et du genre linéaire.

A la différence entre les adjointes aux surfaces F' et les surfaces F', correspond sur V' les surfaces suivant lesquelles un hyperplan ξ'_1 de S_{12} touche la variété V'.

6. Supposons maintenant $m = n = 3$, donc $r = 7$ et $R = 19$. L'involution engendrée par H dans l'espace S_7 est représentée dans l'espace S_{19} par une variété W d'ordre 64. Les systèmes d'hyperquadriques $| Q_1 |$ et $| Q_0 |$ ont respectivement pour dimensions 19 et 15.

Considérons une surface F intersection de cinq hyperquadriques Q_1 et soit F' la surface qui représente l'involution engendrée sur F par H, involution privée de points unis. La surface F' appartient à cinq hyperplans de S_{19} et appartient donc à un espace à quatorze dimensions, S_{14}.

Le système canonique de F est découpé par les hyperquadriques de S_7. Il contient deux systèmes linéaires appartenant à l'involution. L'un, découpé par les hyperquadriques Q_1 ne contenant pas F a la dimension quatorze, l'autre, découpé par les hyperquadriques Q_0, a la dimension quinze. Le transformé du système canonique de F' est celui de ces systèmes qui a la dimension minimum, c'est-à-dire le premier. On en conclut que le système canonique de F' est celui de ses sections hyperplanes. Le genre arithmétique de F' est donc $p'_a = 15$. D'ailleurs, celui de F étant $p_a = 31$, on a

$$p_a + 1 = 2(p'_a + 1),$$

Aux courbes canoniques de F découpées par les hyperquadriques Q_0 correspondent sur F' des courbes (F',Q'_0) le long desquelles une hyperquadrique touche la surface. On a

$$2(F',Q_1') \equiv 2(F',Q_0').$$

La surface F est d'ordre 2^5 et son genre linéaire est $p^{(1)} = 2^7 + 1$. L'ordre de la surface F' est donc égal à 2^6 et son genre linéaire est donc égal à 65.

Les courbes (F',Q_0') sont de genre 65 et forment un système linéaire de degré 64 et de dimension 15.

7. Considérons la surface F_0 intersection complète de quatre hyperquadriques Q_1 et d'une hyperquadrique Q_0. Le système canonique de F_0 est découpé par les hypersurfaces quadratiques et contient deux systèmes linéaires appartenant à l'involution déterminée par H sur la surface. Cette involution est privée de points unis. L'un des systèmes est découpé par les hyperquadriques Q_1 et a la dimension 15, l'autre est découpé par les hyperquadriques Q_0 et a la dimension 14. Le système canonique de la surface F_0' qui correspond à F_0 sur W, a pour homologue celui des systèmes précédents qui a la dimension minimum, c'est-à-dire le système $|(F_0,Q_0)|$.

La surface F_0' appartient à un espace à 15 dimensions, S_{15}. Les courbes canoniques de F_0' sont les courbes (F_0',Q_0') le long desquelles une hyperquadrique de S_{15} touche la section de W par cet espace. Le genre arithmétique de F_0' est $p_a' = 15$. Celui de F_0 étant $p_a = 31$, on a bien

$$p_a + 1 = 2(p_a' + 1).$$

L'ordre de la surface F_0' est égal à 64 et son genere linéaire est donc $p^{(1)} = 65$.

On a

$$2(F_0',Q_1') \equiv 2(F_0',Q_0').$$

Le système bicanonique de F_0' contient la courbe (F_0',Q_0') comptée deux fois et est donc découpé sur F_0' par les hyperquadriques Q_0'.

8. Soient V la variété à trois dimensions intersection de quatre hyperquadriques Q_1 de S_7 et V' la variété qui lui correspond sur la section de W par l'espace S_{15} à 15 dimensions, variété que nous désignerons par W'.

Les sections hyperplanes de V' sont des surfaces F' sur lesquelles le système canonique est découpé par les hyperplans de S_{15}. Il en résulte que sur V' les adjointes aux surfaces F' sont les surfaces F' elles-mêmes. La variété V' possède donc une surface canonique d'ordre zéro.

Il en résulte que le système $| F'_0 |$ est également son propre adjoint. Ce système, également comme $| F' |$, a la dimension 15.

Le système $| F' |$ étant son propre adjoint, le système bicanonique de V' est adjoint à $| F' |$, donc est ce système lui-même. Il en résulte que la surface bicanonique de V' est d'ordre zéro et qu'il en est de même des surfaces pluricanoniqucs.

La variété à trois dimensions V' *a ses surfaces canonique et pluricanoniques d'ordre zéro.*

On a

$$2(W',Q'_1) \equiv 2(W',Q'_0).$$

les courbes communes aux surfaces (W',Q'_1), (W',Q'_0) sont de genre 65.

9. Passons au cas général et supposons $n = m$, d'où $r = 2m + 1$ et $R = (m + 1)(m + 2) - 1$. La variété W a la dimension $2m + 1$, est d'ordre 2^{2m} et appartient à l'espace S_R.

Considérons la variété algébrique V de S_{2m+1} intersection de $m + 2$ hyperquadriques Q_1, par conséquent de dimension $m - 1$.

Désignons par V' la variété qui représente l'involution I d'ordre deux déterminée par H sur cette variété V. La variété V' est située dans $m + 2$ hyperplans de S_R c'est-à-dire dans un espace S' à $m(m + 2) - 1$ dimensions. Nous désignerons par W' la section de W par cet espace.

Le système canonique de V est découpé sur V par les variétés d'ordre deux, c'est-à-dire par les hyperquadriques. La variété V étant complètement régulière, son genre arithmétique est

$$p_a = p_g = 2m(m + 2) + 1.$$

Le système canonique de V contient deux systèmes appartenant à l'involution I. L'un est découpé par les hyperquadriques Q_1 et a la dimension $m(m + 2) - 1$. L'autre est découpé par les hyperquadriques Q_0 et a la dimension $(m + 1)^2 - 1$.

Nous avons démontré, dans la note citée plus haut (n° 3), que si $m - 1$ est pair, le transformé du système canonique de la variété V' était celui des systèmes précédents qui a la dimension minimum. Par contre, si $m - 1$ est impair, c'est celui des systèmes qui a la dimension maximum.

Supposons que m soit impair, donc $m - 1$ pair. Le système canonique de V' a pour transformé sur V le premier des systèmes précédents, c'est-à-dire que les sections hyperplanes de V' forment le système canonique. Le genre arithmétique de V' est donc

$$p'_a = p'_g = m(m + 2).$$

Observons que l'on a

$$p_a + 1 = 2(p'_a + 1).$$

Supposons maintenant que m soit pair, donc $m - 1$ impair. Le système canonique de V' a pour homologue sur V le système découpé par les hyperquadriques Q_0. Aux hyperquadriques Q_0 correspondent sur W des variétés le long desquelles une hyperquadrique (passant par Φ_1 et Φ_2) touche la variété. Ces hyperquadriques touchent de même la variété W' et par suite la variété V' le long de variétés (Q'_0, V'). On a d'ailleurs

$$2(V', Q'_1) \equiv 2(V', Q'_0).$$

On a actuellement $p'_a = (m + 1)^2$. On a donc

$$p_a - 1 = 2(p'_a - 1),$$

ce qui montre que la relation entre les genres arithmétiques de V et de V' dépend de la parité du nombre de dimensions de V.

10. Considérons maintenant la variété M commune à $m + 1$ hyperquadriques Q_1 dont la dimension est égale à m. Le système canonique de M est découpé par les hypersurfaces d'ordre zéro, c'est-à-dire que M possède une variété canonique d'ordre zéro.

L'involution déterminée sur M par l'homographie H a pour image une variété M' section de W par $m + 1$ hyperplans de S_R, c'est-à-dire par un espace S'' à $(m + 1)^2 - 1$ dimensions.

Supposons en premier lieu m impair. Aux sections de la variété M par des hyperquadriques Q_1 correspondent sur M' des sections hyperplanes V' de cette variété. Le système canonique des variétés V' est découpé par les hyperplans de S'' et par conséquent, sur M', le système $| V' |$ est son propre adjoint. La variété M' possède donc une variété canonique d'ordre zéro.

Comme plus haut, on démontre que tout système linéaire de variétés à $m - 1$ dimensions tracées sur M′ est son propre adjoint et que les variétés canonique et pluricanoniques de M′ sont d'ordre zéro.

Supposons maintenant m pair. A la section de M par une hyperquadrique Q_1 correspond sur M′ une variété V_0' le long de laquelle une hyperquadrique de S″ touche la variété. Le système $|V_0'|$ est son propre adjoint puisque tracé sur M′.

La section de la variété W *lieu des droites s'appuyant sur deux variétés de Veronese d'ordre* 2^m *situées dans un espace à* $(m + 1)(m + 2) - 1$ *dimensions, par un espace à* $(m + 1)^2 - 1$ *dimensions, est une variété d'ordre* 2^{2m}*, à* m *dimensions, possédant des variétés canonique et pluricanoniques d'ordre zéro.*

Liège, le 11 avril 1974.