

GÉOMÉTRIE ALGÈBRE

Sur les involutions appartenant à des variétés algébriques intersections complètes d'hypersurfaces,

par LUCIEN GODEAUX,
Membre de l'Académie.

Nos recherches sur les involutions cycliques appartenant à une surface ou à une variété algébriques nous ont fréquemment conduit à construire des exemples de surfaces et de variétés contenant de telles involutions. Notre but était de montrer l'existence des involutions étudiées. C'est dans le même ordre d'idées que cette note a été écrite. Nous considérons la variété à k dimensions intersection complète de n hypersurfaces d'ordre p dans un espace linéaire à $n + k$ dimensions. Nous déterminons le système canonique de cette variété. Lorsque celle-ci est une courbe ($k = 1$), nous en déterminons le genre et lorsque c'est une surface ($k = 2$), nous en déterminons les genres arithmétique, géométrique et linéaire.

Nous supposons ensuite p premier et supérieur à deux ; nous considérons quelques involutions cycliques d'ordre p appartenant à une surface, en prenant $k = 2$. On obtient ainsi des involutions présentant p^n points unis ; nous reviendrons plus tard sur la structure de ces points et des points de diramation correspondants sur une surface image de l'involution ⁽¹⁾.

⁽¹⁾ On trouvera la bibliographie des questions étudiées dans notre exposé

Nous considérons ensuite une variété de dimension $k = (p - 1)n - 1$ appartenant à un espace à $p - 1$ dimensions. Cette variété possède une hypersurface canonique d'ordre zéro. En considérant une involution cyclique de période p premier impair, possédant un nombre fini de points unis, sur cette variété, nous parvenons à construire une variété algébrique de dimension $(p - 1)n - 1$, sur laquelle l'opération d'adjonction a la période p . Nous nous sommes borné à établir ce théorème ; dans une prochaine note, nous étudierons d'une manière plus approfondie la structure des points unis de l'involution ⁽¹⁾.

1. Considérons, dans un espace linéaire S_{n+1} , à $n + 1$ dimensions, n hypersurfaces d'ordre p , V_n^p , se rencontrant suivant une courbe V_1 , d'ordre p^n , dont nous désignerons le genre par π_n .

Si l'une des hypersurfaces V_n^p dégénère en p hyperplans, on a, d'après la formule de Noether,

$$\pi_n = p\pi_{n-1} + \binom{p}{2} p^{n-1} - (p - 1).$$

On peut donc écrire

$$p^i \pi_{n-i} = p^{i+1} \pi_{n-i-1} + \binom{p}{2} p^{n-1} - (p - 1) p^i.$$

Faisons dans cette formule $i = 0, 1, \dots, n - 2$ et additionnons les relations obtenues membre à membre, en remarquant que l'on a

$$\pi_1 = \binom{p-1}{2}$$

sur *Les involutions cycliques appartenant à une surface algébrique* (Paris, Hermann, 1935).

⁽¹⁾ Voir notre note sur *Un problème sur les variétés algébriques* (REVUE SCIENTIFIQUE, 1943). Nous étions parvenu antérieurement à construire des variétés algébriques à trois dimensions sur lesquelles l'opération d'adjonction a la période trois. Dans un mémoire encore inédit, M. B. d'Orgeval est parvenu à construire des variétés à trois dimensions sur lesquelles l'opération d'adjonction a la période cinq.

Nous obtenons

$$\pi_n = \frac{1}{2}[(p-1)n - 2]p^n + 1.$$

La série canonique de la courbe V_1 est d'ordre

$$2\pi_n - 2 = [(p-1)n - 2]p^n.$$

Désignons par $|G|$ la série des sections hyperplanes de la courbe V_1 et soit σ un espace linéaire à $n-1$ dimensions. Les hypersurfaces polaires des points de σ par rapport aux n hypersurfaces V_n^p passant par V_1 engendrent des systèmes linéaires ω^{n-1} deux-à-deux homographiques et l'intersection des polaires d'un point de σ engendre donc une hypersurface $W_n^{(p-1)n}$ d'ordre $(p-1)n$. Soit P un point de V_1 en lequel la tangente à cette courbe s'appuie sur σ . Le point P appartient à l'hypersurface $W_n^{(p-1)n}$ et réciproquement, en un point d'intersection de V_1 et de $W_n^{(p-1)n}$, la tangente à V_1 s'appuie sur σ . Il en résulte que le jacobien de la série ω^1 tirée de $|G|$ et découpée sur V_1 par les hyperplans passant par σ , est découpé sur V_1 par $W_n^{(p-1)n}$. Par conséquent, la série jacobienne de $|G|$ est

$$|G_j| = |(p-1)nG|$$

et la série canonique

$$|G_j - 2G| = |[(p-1)n - 2]G|$$

est découpée sur V_1 par les hypersurfaces d'ordre $(p-1)n - 2$. De plus, d'après un théorème de MM. Castelnuovo ⁽¹⁾ et Severi ⁽²⁾, on obtient ainsi la série canonique complète.

La courbe d'ordre p^n de S_{n+1} , intersection de n hypersurfaces d'ordre p , a le genre

⁽¹⁾ *Sui multipli di una serie lineare di gruppi di punti appartenente ad una curva algebrica* (REND. CIRC. MATEM. PALERMO, 1893; MEMORIE scelti, Bologne, 1937).

⁽²⁾ BERTINI et SEVERI, *Osservazioni sul Restsatz per una curva iperspaziale* (ATTI R. ACCAD. TORINO, 1907-1908).

$$\pi = \frac{1}{2}[(p-1)n-2]p^n + 1;$$

les hypersurfaces d'ordre $(p-1)n-2$ découpent sur cette courbe la série canonique complète.

2. Soit, dans un espace S_{n+2} à $n+2$ dimensions, une surface V_2 d'ordre p^n intersection de n hypersurfaces V_{n+1}^p d'ordre p . Désignons par p_a^n le genre arithmétique de cette surface. Pour calculer p_a^n , nous utiliserons le même raisonnement que dans le cas des courbes, en usant d'une formule donnant le genre arithmétique d'une surface formée de n surfaces. Cette formule, que l'on déduit aisément d'une formule de M. Severi, sera établie dans le numéro suivant.

Supposons qu'une des hypersurfaces V_{n+1}^p se décompose en p hyperplans; la surface V_2 se décompose en p surfaces analogues, obtenues en remplaçant n par $n-1$. On a donc

$$p_a^n = p p_a^{n-1} + \binom{p}{2} \pi_{n-1} + \binom{p}{3} p^{n-1} - \binom{p-1}{2},$$

π_{n-1} ayant la même signification que précédemment. Cette relation s'écrit

$$p_a^n = p p_a^{n-1} + \frac{1}{2} \binom{p}{2} (p-1) p^{n-1} n - \frac{1}{12} p(p-1)(p+7) p^{n-1} + p-1.$$

On en déduit

$$\begin{aligned} p^i p_a^{n-i} &= p p_a^{n-i-1} + \frac{1}{2} \binom{p}{2} (p-1) p^{n-1} (n-i) \\ &\quad - \frac{1}{12} p(p-1)(p+7) p^{n-1} + (p-1) p^i. \end{aligned}$$

Dans cette relation, donnons à i les valeurs 0, 1, ..., $n-2$ et additionnons membre à membre les relations obtenues, en remarquant que

$$p_a^1 = \binom{p-1}{3}.$$

Nous obtenons ainsi

$$p_a^n = \frac{1}{24} [3(p-1)^2 n^2 + (p-1)(p-17)n + 24] p^n - 1.$$

3. Nous allons maintenant justifier la formule employée plus haut. D'après un théorème de M. Severi ⁽¹⁾, si deux surfaces tracées sur une variété algébrique à trois dimensions ont les genres arithmétiques p_a , p'_a et se rencontrent suivant une courbe de genre π , leur somme est une surface de genre arithmétique $p_a + p'_a + \pi$.

Reprenons la surface V_2 intersection de n hypersurfaces V_{n+1}^p de S_{n+2} et supposons que l'une de ces hypersurfaces soit formée de p hyperplans. Les $n - 1$ hypersurfaces restantes ont en commun une variété W_3 , à trois dimensions d'ordre 2^{n-1} . Chacun des hyperplans considérés coupe W_3 suivant une surface; désignons ces surfaces par $W_2^{(1)}$, $W_2^{(2)}$, ..., $W_2^{(p)}$. Chacune de ces surfaces a le genre arithmétique p_a^{n-1} . Deux de ces surfaces se rencontrent suivant une courbe d'ordre p^{n-1} et de genre π_{n-1} . Trois de ces hypersurfaces se rencontrent suivant p^{n-1} points.

Cela étant, la surface $W_2^{(1)} + W_2^{(2)}$ a le genre arithmétique $2p_a^{n-1} + \pi_{n-1}$. La surface $W_2^{(3)}$ coupe la surface précédente suivant une courbe de genre $2\pi_{n-1} + p^{n-1} - 1$, donc la surface $W_2^{(1)} + W_2^{(2)} + W_2^{(3)}$ a le genre arithmétique $3p_a^{n-1} + 3\pi_{n-1} + p^{n-1} - 1$.

D'une manière générale, supposons que le genre arithmétique de la surface

$$W_2^{(1)} + W_2^{(2)} + \dots + W_2^{(q)}$$

soit égal à

$$qp_a^{n-1} + \binom{q}{2} \pi_{n-1} + \binom{q}{3} p^{n-1} - \binom{q-1}{2}. \quad (1)$$

La surface $W_2^{(q+1)}$ coupe la surface précédente suivant une courbe de genre

$$q\pi_{n-1} + \binom{q}{2} p^{n-1} - (q-1)$$

⁽¹⁾ *Fondamenti per la Geometria sulle varietà algebriche* (REND. CIRCOLO MATEM. PALERMO, 1909, t. XXVIII).

et par suite la surface

$$W_2^{(1)} + W_2^{(2)} + \dots + W_2^{(q)} + W_2^{(q+1)}$$

a le genre arithmétique

$$(q+1)p_a^{n-1} + \binom{q+1}{2}\pi_{n-1} + \binom{q+1}{3}p^{n-1} - \binom{q}{2}$$

La formule (1) est donc valable, puisqu'elle est exacte pour $q = 3$. Pour $q = p$ on obtiendra le genre arithmétique de V_2 . ⁽¹⁾

4. Revenons à la surface V_2 d'ordre 2^n de S_{n+2} . Les sections hyperplanes de cette surface sont les courbes V_1 considérées au début. Les adjointes V'_1 aux sections hyperplanes sont découpées par les hypersurfaces d'ordre $(p-1)n-2$ et on a donc

$$|V'_1| = |[(p-1)n-2]V_1|.$$

Le système canonique de V_2 est donc

$$|V'_1 - V_1| = |[(p-1)n-3]V_1|.$$

Observons que le système adjoint $|V'_1|$ découpe sur une courbe V_1 la série canonique complète de cette courbe, par conséquent, d'après un théorème de M. Enriques, la surface V_2 est régulière.

Il en résulte également que les hypersurfaces d'ordre $(p-1)n-3$ découpent sur V_2 le système canonique complet de cette surface ⁽²⁾.

La surface d'ordre p^n , de S_{n+2} , intersection de n hypersurfaces d'ordre p , a les genres

$$p_a = p_g = \frac{1}{24}[3(p-1)^2n^2 + (p-1)(p-17)n + 24]p^n - 1, \\ p^{(1)} = [(p-1)n-3]^2p^n + 1;$$

⁽¹⁾ Plus généralement, si sur une variété à trois dimensions, on a un système linéaire de surfaces $|F|$, de genre arithmétique p_a , de genre sectionnel π et de degré n , le système linéaire $|pF|$ a le genre arithmétique

$$p p_a + \binom{p}{2} \pi + \binom{p}{3} n - \binom{p-1}{2}.$$

⁽²⁾ Ce théorème est un cas particulier de celui que nous avons établi dans une note antérieure : Sur les surfaces algébriques intersections complètes d'hypersurfaces (Universidad Nacional de Tucuman, Revista, 1942).

les hypersurfaces d'ordre $(p-1)n-3$ découpent sur cette surface le système canonique complet.

5. Considérons maintenant, dans un espace linéaire S_{n+3} , à $n+3$ dimensions, la variété V_3 , à trois dimensions, d'ordre p^n , intersection de n hypersurfaces V_{n+2} d'ordre p^n . Les sections hyperplanes de V_3 sont des surfaces V_2 et l'adjoint $|V'_2|$ de $|V_2|$ est donné par

$$|V'_2| = |[(p-1)n-3]V_2|.$$

Le système canonique de V_3 est donc découpé par les hypersurfaces d'ordre $(p-1)n-4$.

Plus généralement, considérons dans l'espace S_{n+k} , à $n+k$ dimensions, la variété V_k , d'ordre p^n , à k dimensions, intersection de n hypersurfaces d'ordre p . Le système canonique de V_k est découpé par les hypersurfaces d'ordre $(p-1)n-k-1$ et ce système est complet. Cette propriété se démontre aisément par récurrence.

En particulier, pour $k = (p-1)n-2$, on obtient une variété V_k dont les sections hyperplanes forment le système canonique.

Pour $k = (p-1)n-1$, on obtient une variété V_k possédant une variété canonique d'ordre zéro.

Observons que si la courbe V_1 est irréductible et privée de points multiples, elle est normale. Il en est par conséquent de même de la surface V_2 , de la variété V_3 , ..., toujours dans l'hypothèse de l'irréductibilité.

6. Nous allons considérer plus particulièrement la surface V_2 , que nous désignerons dorénavant par F ; ses sections hyperplanes, qui sont des courbes V_1 , seront désignées par C .

Supposons que p soit un nombre premier supérieur à deux et que les n hypersurfaces V_{n-1} définissant F soient transformées en elles-mêmes par une homogra-

phie H de période p de S_{n+2} . L'homographie H engendre sur F une involution I_p d'ordre p , dont nous désignons par Φ une surface image.

On peut choisir H de manière que l'involution I_p n'ait qu'un nombre fini de points unis, ou qu'elle en soit dépourvue. Nous allons examiner quelques exemples.

Désignons par $x_0, x_1, \dots, x_{n+2}$ les coordonnées projectives homogènes des points de l'espace S_{n+2} et prenons pour H l'homographie

$$\frac{x'_0}{x_0} = \frac{x'_1}{x_1} = \dots = \frac{x'_{n-1}}{x_{n-1}} = \frac{x'_n}{\epsilon x_n} = \frac{x'_{n+1}}{\epsilon^\alpha x_{n+1}} = \frac{x'_{n+2}}{\epsilon^\beta x_{n+2}},$$

ϵ étant une racine primitive d'ordre p de l'unité, α, β étant des entiers compris entre 1 et p . Soient $O_0, O_1, O_2, \dots, O_{n+2}$ les sommets de la figure de référence. L'homographie a pour axes un espace $\sigma_{n-1} : O_0 O_1 \dots O_{n-1}$ et trois points O_n, O_{n+1}, O_{n+2} si $\alpha \neq \beta$; un point O_n et une droite $O_{n+1} O_{n+2}$ si $\alpha = \beta$.

Nous supposons $n \geq 4$ et nous prendrons pour les n hypersurfaces V_{n+1}^p des hypersurfaces qui ne contiennent aucun des axes de l'homographie H . Dans ces conditions, F ne rencontre aucun des axes de l'homographie et l'involution I_p engendrée par celle-ci sur F est dépourvue de points unis.

Nous obtiendrons un modèle projectif de la surface Φ en projetant la surface F du plan $O_n O_{n+1} O_{n+2}$ sur l'espace σ_{n-1} . La surface Φ ainsi obtenue est d'ordre p^{n-1} et ses sections hyperplanes Γ sont de genre $\frac{1}{2}[(p-1)n - 2]p^{n-1} + 1$. Il suffit, pour obtenir cette valeur du genre, d'appliquer la formule de Zeuthen à la correspondance $(1, p)$ existant entre une courbe Γ et la section de F par l'hyperplan contenant Γ et le plan $O_n O_{n+1} O_{n+2}$.

La section de F par l'hyperplan $O_0 O_1 \dots O_{n-1} O_{n+1} O_{n+2}$ est transformée en elle-même par H ; il lui correspond sur Φ une courbe isolée Γ_1 d'ordre p^{n-1} , de même genre que les courbes Γ . Si $\alpha \neq \beta$, on obtient

deux autres courbes analogues Γ_2, Γ_3 en partant des hyperplans $O_0O_1 \dots O_{n-1} O_n O_{n+2}, O_0O_1 \dots O_{n-1}O_nO_{n+1}$. Si au contraire $\alpha = \beta$, les hyperplans passant par $O_0O_1 \dots O_{n-1}O_n$ fournissent un faisceau de courbes Γ_2 d'ordre p^{n-1} , de même genre que les courbes Γ .

D'après la théorie des involutions, il existe dans σ_{n-1} une hypersurface d'ordre p ayant un contact d'ordre $p-1$ avec la surface Φ le long de chacune des courbes $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$.

D'après les relations que nous avons établies dans cette théorie, les genres de la surface Φ sont donnés par

$$p_a = p_o = \frac{1}{24}[3(p-1)^2n^2 + (p-1)(p-17)n + 24]p^{n-1} - 1, \\ p^{(1)} = [(p-1)n - 3]^2p^{n-1} + 1.$$

Le système canonique complet de la surface Φ est découpé par les hypersurfaces d'ordre $(p-1)n-3$ de l'espace σ_{n-1} .

7. Nous supposons maintenant que H a pour équations

$$\frac{x'_0}{x_0} = \frac{x'_1}{x_1} = \dots = \frac{x'_n}{x_n} = \frac{x'_{n+1}}{\epsilon x_{n+1}} = \frac{x'_{n+2}}{\epsilon^a x_{n+2}},$$

α étant un entier compris entre 1 et p . Les axes de H sont actuellement un espace $\sigma_n : O_0O_1 \dots O_n$ à n dimensions et les points O_{n+1}, O_{n+2} . Nous prendrons pour hypersurfaces V_{n+1}^p des hypersurfaces ne passant par aucun des axes de l'homographie; ces hypersurfaces auront donc des équations de la forme

$$\sum_{i,k} x_{n+1}^{kp-\alpha i} x_{n+2}^i \phi_{ik}(x_0, x_1, \dots, x_n) = 0,$$

où l'on a posé

$$p = \alpha a + k, \quad k < a,$$

ϕ_{ik} étant un polynome entier de degré $i(a-1) -$

$(k-1)p$ en $x_0, x_1, \dots, x_n$. Le nombre k prend les valeurs $0, 1, 2, \dots, \alpha$ et, pour chaque valeur de k , i satisfaisant à la double inégalité

$$(k-1) \frac{p}{\alpha-1} < i < k \frac{p}{\alpha}.$$

On obtiendra ainsi, sur la surface F , une involution I_p présentant p^n points unis, avec points de rencontre de la surface et de l'axe σ_n de H . En projetant F de la droite $O_{n+1} O_{n+2}$ sur l'espace σ_n , on obtiendra un modèle projectif de Φ . Cette surface Φ sera d'ordre p^{n-1} et ses sections hyperplanes Γ seront de genre $\frac{1}{2}[(p-1)n-2]p^{n-1}$.

Appelons C_1 la section de F par l'hyperplan $\sigma_n O_{n+2}$, C_2 la section de F par l'hyperplan $\sigma_n O_{n+1}$. Aux courbes C_1, C_2 , qui passent par les points unis de l'involution I_p , correspondent sur Φ des courbes Γ_1, Γ_2 d'ordre p^{n-1} et de genre $\frac{1}{2}[(p-1)(n-1)-2]p^{n-1} + 1$.

Le long de chacune des courbes Γ_1, Γ_2 , il existe une hypersurface d'ordre p ayant un contact d'ordre $p-1$ avec la surface Φ .

8. Soit A un des points unis de l'involution I_p . Le plan tangent à F en ce point passe par les points O_{n+1}, O_{n+2} et dans ce plan, H détermine une homographie ayant trois points unis : A, O_{n+1}, O_{n+2} . Il en résulte que A est un point uni non parfait de l'involution I^p .

En A , la courbe C_1 touche la droite AO_{n+2} et la courbe C_2 , la droite AO_{n+1} .

Le point de diramation A' de la surface Φ , qui correspond au point A , est singulier pour cette surface. Pour étudier cette singularité, il faut connaître la singularité en A des courbes C_0 découpées sur F par les hyperplans passant par les points A, O_{n+1}, O_{n+2} .

Dans le système complet $|pC|$, il existe un système linéaire partiel, dépourvu de points-base, appartenant à l'involution I_p ; il comprend les courbes pC_0 et est

découpé sur F par les hypersurfaces d'ordre p dont l'équation, lorsque l'on opère la substitution H , se reproduit multipliée par $\epsilon^0 = 1$.

Posons

$$p = a\alpha + h, \quad 2p = a_2\alpha + h_2, \quad \dots, \quad kp = a_k\alpha + h_k, \quad \dots, \\ (\alpha - 1)p = a_{\alpha-1}\alpha + h_{\alpha-1},$$

où $h, h_2, \dots, h_{\alpha-1}$ sont inférieurs à α . D'après la définition du système partiel $|pC_0|$, les courbes

$$hC_1 + aC_2 + a(\alpha - 1)C_0, \quad h_2C_1 + a_2C_2 + a_2(\alpha - 1)C_0, \\ \dots, \quad h_{\alpha-1}C_1 + a_{\alpha-1}C_2 + a_{\alpha-1}(\alpha - 1)C_0$$

appartiennent à ce système $|pC_0|$.

Supposons que $\nu = a_\lambda + h_\lambda$ soit le plus petit des nombres $a + h, a_1 + h_1, \dots, a_{\alpha-1} + h_{\alpha-1}$, nombres d'ailleurs tous différents. Cela signifie que les courbes du système $|pC_0|$ passant par A acquièrent en ce point la multiplicité $\nu = a_\lambda + h_\lambda$, a_λ tangentes étant confondues avec le tangente à C_2 , h_λ avec la tangente à C_1 .

Parmi les courbes du système $|pC_0|$, se trouvent les courbes formées de $p - 1$ courbes C_0 ne passant pas par A et d'une courbe C_0 passant par ce point. On en conclut que les courbes C_0 passant par A acquièrent en ce point la multiplicité $\nu = a_\lambda + h_\lambda$, h_λ tangentes étant confondues avec la tangente à C_1 , a_λ avec la tangente à C_2 .

L'analyse de la singularité des courbes C_0 passant par A permettra de fixer la singularité de la surface Φ au point de diramation correspondant A' .

Observons que tous les points de diramation de la surface Φ auront nécessairement le même comportement.

9. Supposons que nous ayons $\alpha = p - 1$. Alors $a = h = 1$, $a_k = h_k = k$. Les courbes C_0 passant par A y acquièrent un point double à tangentes fixes.

En un point de diramation, la surface Φ possède un point double biplanaire auquel sont infiniment voisins successifs $\frac{1}{2}(p-3)$ points doubles biplanaires dont le dernier est ordinaire.

Les genres de la surface Φ ont pour valeurs

$$\begin{aligned} p_a = p_g &= \frac{1}{24}[3(p-1)^2 n^2 + (p-1)(p-17)n \\ &\quad + 2(p^2 + 11)]p^{n-1} - 1, \\ p^{(1)} &= [(p-1)n - 3]^2 p^{n-1} + 1. \end{aligned}$$

10. Supposons maintenant que nous ayons $a = 2$, d'où $h = 1$. Dans le voisinage du point uni A se trouve, sur la courbe C_2 , un point uni parfait infiniment voisin.

Les courbes C_0 passant par le point uni A y acquièrent un point multiple d'ordre $a+1$, a tangentes étant confondues avec la tangente à C_2 , une tangente avec la tangente à C_1 .

En un point de diramation, la surface Φ a la multiplicité $a+1$, le cône tangent étant formé d'un cône rationnel d'ordre a et d'un plan coupant ce cône suivant une droite.

Les genres de la surface Φ sont donnés par

$$\begin{aligned} p_a = p_g &= \frac{1}{24}[3(p-1)^2 n^2 + (p-1)(p-17)n \\ &\quad - 12(p^2 - 12p + 9)]p^{n-1} - 1, \\ p^{(1)} &= [(p-1)n + p - 6][(p-1)^n - p]p^{n-1} + 1. \end{aligned}$$

11. Supposons $a = p-2$. On a $a = 1$, $h = 2$. Les courbes C_0 passant par A ont la multiplicité trois et $\frac{1}{2}(p-3)$ points doubles infiniment voisins successifs de A situés sur la courbe C_1 , $p-3$ points simples infiniment voisins successifs de A situés sur la courbe C_2 ⁽¹⁾.

⁽¹⁾ Voir notre mémoire *Sur la structure des points unis des involutions cycliques appartenant à une surface algébrique* (MÉM. IN-8° DE L'ACAD. ROY. DE BELGIQUE, 1938, t. XVII).

En un point de diramation, Φ possède un point triple, le cône tangent étant formé d'un cône du second ordre et d'un plan coupant le cône suivant une droite.

Les genres de la surface Φ sont donnés par ⁽¹⁾

$$\begin{aligned} p_a = p_g &= \frac{1}{24}[3(p-1)^2 n^2 + (p-1)(p-17)n \\ &\quad + 12(p^2 + 1)]p^{n-1}, \\ p^{(1)} &= \frac{1}{2}[2(p-1)^2 n^2 - 12(p-1)n - p + 18]p^{n-1} + 1. \end{aligned}$$

12. Supposons enfin que H ait pour équations

$$\frac{x'_0}{x_0} = \frac{x'_1}{x_1} = \dots = \frac{x'_n}{x_n} = \frac{x'_{n+1}}{\epsilon x_{n+1}} = \frac{x'_{n+2}}{\epsilon x_{n+2}}.$$

L'homographie a deux axes : l'espace σ_n ou $O_0 O_1 \dots O_n$ et la droite $O_{n+1} O_{n+2}$. L'involution I_p possède p^n points unis parfaits sur σ_n , les hypersurfaces V_{n+1}^p ayant des équations de la forme

$$\phi_1(x_0, x_1, \dots, x_n) + \phi_2(x_{n+1}, x_{n+2}) = 0,$$

ϕ_1 et ϕ_2 étant des polynômes de degré p .

La surface Φ possède p^n points de diramation qui sont des points multiples d'ordre p , à cônes tangents rationnels.

Les genres de la surface Φ ont pour valeurs

$$\begin{aligned} p_a = p_g &= \frac{1}{24}[3(p-1)^2 n^2 + (p^2 - 1)(p-17)n \\ &\quad - 2(p^2 - 6p - 7)]p^{n-1} - 1, \\ p^{(1)} &= [(p-1)n - (p^2 + 1)][(p-1)n + p - 5] + 1. \end{aligned}$$

13. Supposons toujours p premier impair et considérons la variété V_k d'ordre p^n à $k = (p-1)n - 1$

(1) Si l'on désigne par p_a et $p^{(1)}$, π_a et $\pi^{(1)}$ les genres arithmétique et linéaire de deux surfaces liées par une correspondance $(p, 1)$, présentant, sur la seconde surface τ points de diramation du type envisagé ici, on a

$$\begin{aligned} 12(p_a + 1) &= 12p(\pi_a + 1) - \frac{\tau}{2}(p^2 - 1), \\ p^{(1)} - 1 &= p(\pi^{(1)} - 1) + \frac{1}{2}(p - 1). \end{aligned}$$

dimensions, appartenant à l'espace S_{n+k} à $n + k = pn - 1$ dimensions. Cette variété possède, comme on l'a vu, une hypersurface canonique et par conséquent des hypersurfaces pluricanoniques d'ordre zéro. Nous la désignerons dans la suite par V ; ses sections hyperplanes seront désignées par W . Notons que la dimension k de V est impaire.

Considérons dans S_{np-1} une homographie H , cyclique de période p , ayant comme axes p espaces linéaires à $n - 1$ dimensions. Il existe un système linéaire d'hypersurfaces d'ordre p , dépourvu de points-base, appartenant à l'involution d'ordre p engendrée par H . Si nous prenons, pour définir la variété V , n hypersurfaces de ce système, cette variété sera transformée en elle-même par H et cette homographie engendrera, sur V , une involution I_p d'ordre p , dépourvue de points unis.

Désignons par $|W_1|$, $|W_2|$, ..., $|W_p|$ les p systèmes linéaires de sections hyperplanes de V découpés par les hyperplans passant par $p - 1$ des axes de l'homographie H . Ces systèmes appartiennent à l'involution I_p .

Soit Ω une variété à $(p - 1)n - 1$ dimensions représentant l'involution I_p . Aux variétés W_1 , W_2 , ..., W_p correspondent sur Ω des variétés que nous désignerons par Ω_1 , Ω_2 , ..., Ω_p , formant des systèmes linéaires complets. On a d'ailleurs

$$|p\Omega_1| = |p\Omega_2| = \dots = |p\Omega_p|.$$

La variété V ayant une hypersurface canonique d'ordre zéro, le système $|W|$ est son propre adjoint. Fixons l'attention sur une variété W_1 , soit W_1^* et sur la variété Ω_1^* qui lui correspond sur Ω . Sur W_1^* , I_p détermine une involution d'ordre p , I_p^* et le système canonique $|(W_1^*, W)|$ de W_1^* contient p systèmes linéaires appartenant à l'involution I_p^* . L'un, $|(W_1^*, W_1)|$, a la dimension $n - 2$; les autres, $|(W_1^*, W_2)|$, $|(W_1^*, W_3)|$, ..., $|(W_1^*, W_p)|$ ont la dimension $n - 1$.

La dimension $(p-1)n-2$ de la variété W_1^* est un nombre pair, par conséquent le transformé de système canonique de Ω_1^* est celui des systèmes qui viennent d'être énumérés qui a la dimension la plus petite ⁽¹⁾. En d'autres termes, le système canonique de Ω_1^* est le système $|(\Omega_1^*, \Omega_1)|$. Le système $|\Omega_1|$ est donc son propre adjoint et la variété Ω possède une hypersurface canonique, et par suite des hypersurfaces pluricanoniques, d'ordre zéro.

Notons en passant que la variété W_1 a le genre arithmétique $pn-1$ et la variété Ω_1 , le genre arithmétique $n-1$.

14. Considérons maintenant, dans S_{np-1} , une homographie H , de période p , ayant p axes ponctuels $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_p$; on supposera que σ_1 a n dimensions, $\sigma_2, \dots, \sigma_{p-1}$, $n-1$ dimensions et σ_p , $n-2$ dimensions.

Choisissons encore, pour définir V , n hypersurfaces d'ordre p , transformées en elles-mêmes par H , ne contenant aucun des axes de H . Dans ces conditions, V ne rencontrera aucun des espaces $\sigma_2, \sigma_3, \dots, \sigma_p$, mais rencontrera σ_1 en p^n points. L'homographie H déterminera donc sur V une involution I_p d'ordre p présentant p^n points unis.

Désignons encore par $|W_1|, |W_2|, \dots, |W_p|$ les systèmes de variétés découpés sur V par les hyperplans passant par $p-1$ des axes $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_p$, le système $|W_i|$ étant découpé par les hyperplans ne contenant pas σ_i . Ces p systèmes appartiennent à l'involution I_p et, sauf le premier $|W_1|$, ont comme point-base les points unis de I_p .

Soient Ω une variété image de l'involution I_p , $\Omega_1, \Omega_2, \dots, \Omega_p$ les variétés qui correspondent sur Ω respectivement aux variétés $W_1, W_2, \dots, W_p$.

(1) Voir notre note *Sur une propriété des correspondances rationnelles entre deux variétés algébriques* (BULLETIN DES SCIENCES MATHÉMATIQUES, 1938).

Fixons comme tantôt l'attention sur une variété W_1^* de $|W_1|$ et sur la variété Ω_1^* qui lui correspond sur Ω . Dans le système canonique $|(W_1^*, W)|$ de W_1^* , il y a p systèmes appartenant à l'involution I_a^* déterminée par I_p sur W_1^* . Ce sont

$$|(W_1^*, W_1)|, |(W_1^*, W_2)|, \dots, |(W_1^*, W_{p-1})|, |(W_1^*, W_p)|.$$

Les $p - 1$ premiers ont la dimension $n - 1$, le dernier la dimension $n - 2$. Par conséquent, c'est ce dernier système qui est le transformé du système canonique de Ω_1^* . Il en résulte que sur Ω , l'adjoint de $|\Omega_1|$ est le système $|\Omega_p|$, c'est-à-dire que

$$|\Omega'_1| = |\Omega_p|.$$

La variété Ω est donc dépourvue d'hypersurface canonique.

Comme les variétés W découpent, sur une variété W_p , le système canonique complet, l'adjoint de $|\Omega_p|$ est l'un des systèmes $|\Omega_1|, |\Omega_2|, \dots, |\Omega_{p-1}|$.

Aux points unis de I_p correspondent sur Ω des ensembles de variétés rationnelles et on a

$$|p\Omega_1| = |p\Omega_2 + \Delta_2| = \dots = |p\Omega_p + \Delta_p|.$$

où $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_p$ sont certains ensembles de variétés rationnelles de dimension pour la correspondance entre Ω et V . On en conclut

$$|p\Omega'_1 - p\Omega_1| = \Delta_p,$$

de sorte que Ω possède une hypersurface p -canonique d'ailleurs nécessairement isolée.

Si $|\Omega_1|$ était l'adjoint de $|\Omega_p|$, Ω posséderait une variété bicanonique, donc une variété $(p + 1)$ -canonique et enfin une variété canonique, ce qui est impossible. L'adjoint de $|\Omega_p|$ est donc un système $|\Omega_i|$ où $1 < i < p$.

Si $|\Omega_1|$ était l'adjoint de $|\Omega_i|$, la variété Ω possé-

derait une hypersurface tricanonique. Mais alors, par addition et soustraction de cette variété et de la variété p -canonique, on parviendrait à l'existence d'une hypersurface canonique, ce qui est impossible.

En raisonnant de même de proche en proche, on arrive à cette conclusion qu'en prenant successivement l'adjoint de $|\Omega_p|$, puis l'adjoint de cet adjoint, et ainsi de suite, on ne parviendra à $|\Omega_1|$ que lorsque l'on aura épuisé tous les systèmes $|\Omega_2|$, $|\Omega_3|$, ..., $|\Omega_{p-1}|$. En d'autres termes, l'opération d'adjonction sur la variété Ω a la période p . La variété Ω est dépourvue d'hypersurfaces canonique, bicanonique, ..., $(p-1)$ -canonique, mais possède une hypersurface p -canonique isolée.

On peut prendre comme modèle projectif de la variété Ω une variété sur laquelle les points de diramation sont des points multiples isolés. La variété p -canonique a alors l'ordre zéro et se réduit à certaines composantes des points de diramation.

Il existe des variétés algébriques à $(p-1)n-1$ dimensions sur lesquelles l'opération d'adjonction a la période p , p étant un nombre premier supérieur à deux.

Liège, le 4 juillet 1944.