EXTRAIT DU *Bulletin de la Société royale des Sciences de Liége*
Séance du 20 avril 1939, nº 4

Sur une surface du quatrième ordre possédant quatorze points doubles coniques,

par L. GODEAUX, Membre de la Société.

Dans un mémoire déjà ancien [1], nous avons étudié les involutions abéliennes et de genres un appartenant à une surface de genres un ($p_a = P_4 = 1$). Nous avons en particulier montré que si une surface F, de genres un, possède une involution de genres un et d'ordre huit, n'ayant qu'un nombre fini de points unis, engendré par un groupe abélien de transformations birationnelles involutives de F en elle-même, cette involution a pour image une surface Φ, de genres un, dont on peut prendre un modèle projectif normal possédant quatorze points doubles coniques (points de diramation). Dans cette note, nous nous proposons d'appliquer nos résultats à une surface Φ du quatrième ordre, possédant quatorze points doubles coniques et de montrer qu'elle est l'image d'une involution du type indiqué, appartenant à une surface de genres un.

1. Soient, dans un espace ordinaire S_3,

$$\varphi_1(x_0, x_1, x_2, x_3) = 0, \quad \varphi_2 = 0, \varphi_3 = 0,$$
$$\psi_1(x_0, x_1, x_2, x_3) = 0, \quad \psi_2 = 0, \psi_3 = 0$$

les équations de six plans dont quatre ne passent pas par un même point. Considérons la surface Φ, du quatrième ordre, d'équation

$$(\varphi_1\psi_1)^2 + (\varphi_2\psi_2)^2 + (\varphi_3\psi_3)^2 - 2\varphi_2\psi_2\varphi_3\psi_3 - 2\varphi_3\psi_3\varphi_1\psi_1 - 2\varphi_1\psi_1\varphi_2\psi_2 = 0.$$

Cette surface possède quatorze points doubles coniques [2], à savoir :

1° Les huit points communs à trois des six plans donnés, les indices de ces trois plans étant différents;

2° Les six points donnés par

$$\varphi_1 = \psi_1 = 0, \quad \varphi_2\psi_2 - \varphi_3\psi_3 = 0,$$
$$\varphi_2 = \psi_2 = 0, \quad \varphi_3\psi_3 - \varphi_1\psi_1 = 0.$$
$$\varphi_3 = \psi_3 = 0, \quad \varphi_1\psi_1 - \varphi_2\psi_2 = 0.$$

---

(1) Mémoire sur les involutions appartenant à une surface de genres un (*Annales de l'École normale supérieure*, 1914, pp. 357-430; 1919, pp. 51-70).

(2) Sur une surface algébrique qui est, de plusieurs manières, enveloppe de systèmes de surfaces (*Bull. de la Soc. Roy. des Sc. de Liége*, 1935, pp. 106-109).

La surface Φ est l'enveloppe de la famille de quadriques

$$\lambda^2 \varphi_1 \psi_1 + \lambda(\varphi_1 \psi_1 + \varphi_2 \psi_2 - \varphi_3 \psi_3) + \varphi_2 \psi_2 = 0. \qquad (1)$$

Chacune de ces quadriques touche la surface Φ le long d'une biquadratique gauche passant par les huit premiers points doubles mentionnés plus haut. La surface Φ est par conséquent l'image de l'involution d'ordre deux engendrée sur la surface Φ_1 d'équations

$$x_4^2 = 2\varphi_1\psi_1, \quad x_5^2 = 2\varphi_2\psi_2, \quad x_4 x_5 = \varphi_1\psi_1 + \varphi_2\psi_2 - \varphi_3\psi_3,$$

de S_5, par l'homographie

$$x'_0 : x'_1 : x'_2 : x'_3 : x'_4 : x'_5 = x_0 : x_1 : x_2 : x_3 : -x_4 : -x_5. \qquad (2)$$

Les courbes découpées sur Φ par les quadriques de la famille (1) correspondent aux sections de Φ_1 par les hyperplans

$$\lambda x_4 + x_5 = 0.$$

2. Les équations de la surface Φ_1 peuvent s'écrire sous la forme

$$x_4^2 = 2\varphi_1\psi_1, \qquad x_5^2 = 2\varphi_2\psi_2, \qquad (x_4 - x_5)^2 = 2\varphi_3\psi_3.$$

Cette surface possède douze points doubles, à savoir :

1° Les points donnés par

$$x_4 = \varphi_1 = \psi_1 = 0, \qquad x_5^2 = 2\varphi_2\psi_2 = 2\varphi_3\psi_3;$$

2° Les points

$$x_5 = \varphi_2 = \psi_2 = 0, \qquad x_4^2 = 2\varphi_1\psi_1 = 2\varphi_3\psi_3;$$

3° Les points

$$x_4 - x_5 = \varphi_3 = \psi_3 = 0, \qquad x_4^2 = 2\varphi_1\psi_1, \quad x_5^2 = 2\varphi_2\psi_2.$$

Ces douze points correspondent aux six points doubles de la surface Φ qui n'appartiennent pas aux quadriques (1).

Posons

$$\varphi_3 \equiv 2a_0\varphi_1 + a_1\psi_1 + 2a_2\varphi_2 + a_3\psi_2,$$
$$\psi_3 \equiv 2b_0\varphi_1 + b_1\psi_1 + 2b_2\varphi_2 + b_3\psi_3,$$

et ensuite

$$\frac{x_4}{y_0 y_1} = \frac{2\varphi_1}{y_0^2} = \frac{\psi_1}{y_1^2} = \frac{x_5}{y_2 y_3} = \frac{2\varphi_2}{y_2^2} = \frac{\psi_2}{y_3^2}.$$

On déduit des équations de Φ_1,

$$(y_0y_1 - y_2y_3)^2 = (a_0y_0^2 + a_1y_1^2 + a_2y_2^2 + a_3y_3^2)(b_0y_0^2 + b_1y_1^2 + b_2y_2^2 + b_3y_3^2).$$

Cette équation représente, dans un espace S_3, une surface Φ_2, du quatrième ordre et de genres un, contenant une involution abélienne d'ordre quatre, n'ayant qu'un nombre fini de points unis, engendrée par les transformations involutives

$$\begin{pmatrix} y_0 & y_1 & -y_2 & -y_3 \\ y_0 & y_1 & y_2 & y_3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} y_0 & -y_1 & y_2 & -y_3 \\ y_0 & y_1 & y_2 & y_3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} y_0 & -y_1 & -y_2 & y_3 \\ y_0 & y_1 & y_2 & y_3 \end{pmatrix}. \tag{3}$$

L'involution du second ordre, engendrée par la première transformation, a pour image la surface Φ_1. Aux involutions engendrées par les deux autres transformations correspond sur la surface Φ_1 l'involution engendrée par la transformation (2).

Aux systèmes de quadriques

$$\lambda y_0 y_2 + y_1 y_3 = 0, \qquad \mu y_0 y_3 + y_1 y_2 = 0,$$

transformés en eux-mêmes par les transformations (3), correspondent respectivement le système de quadriques (1) et le système de quadriques

$$\mu^2 \varphi_1 \psi_2 + \mu(\varphi_1 \psi_1 + \varphi_2 \psi_2 - \varphi_3 \psi_3) + \varphi_2 \psi_1 = 0,$$

dont l'enveloppe est la surface Φ.

Les points de diramation de la correspondance entre les surfaces Φ_1 et Φ_2 sont les huit points doubles

$$x_4 = \varphi_1 = \psi_1 = 0, \qquad x_5^2 = 2\varphi_2\psi_2 = 2\varphi_3\psi_3;$$
$$x_5 = \varphi_2 = \psi_2 = 0, \qquad x_4^2 = 2\varphi_1\psi_1 = 2\varphi_3\psi_3.$$

3. La surface Φ_2 est l'enveloppe de la famille de quadriques

$$\left.\begin{aligned} &\lambda_2(a_0 y_0^2 + a_2 y_1^2 + a_2 y_2^2 + a_3 y_3^2) \\ &+ 2\lambda(y_0 y_1 - y_2 y_3) + b_0 y_0^2 + b_1 y_1^2 + b_2 y_2^2 + b_3 y_0^2 = 0, \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

qui possède huit points-base, doubles coniques pour la surface. Ces points correspondent aux quatre points doubles de la surface Φ_1 situés dans le plan

$$x_4 - x_5 = \varphi_3 = \psi_3 = 0.$$

La surface Φ_2 est donc l'image de l'involution du second ordre, appartenant à la surface F de S_5, d'équations

$$y_4^2 = a_0 y_0^2 + a_1 y_1^2 + a_2 y_2^2 + a_3 y_3^2, \qquad y_5^2 = b_0 y_0^2 + b_1 y_1^2 + b_2 y_2^2 + b_3 y_3^2,$$
$$y_4 y_5 = y_0 y_1 - y_2 y_3,$$

engendrée par l'homographie

$$y_0' : y_1' : y_2' : y_3' : y_4' : y_5' = y_0 : y_1 : y_2 : y_3 : -y_4 : -y_5. \tag{5}$$

La surface F contient une involution abélienne d'ordre huit, n'ayant qu'un nombre fini de points unis, engendrée par les transformations birationnelles involutives (5) et

$$\begin{pmatrix} y_0 & y_1 & -y_2 & -y_3 & -y_4 & -y_5 \\ y_0 & y_1 & y_2 & y_3 & y_4 & y_5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_0 & -y_1 & y_2 & -y_3 & y_4 & -y_5 \\ y_0 & y_1 & y_2 & y_3 & y_4 & y_5 \end{pmatrix} \quad (6)$$

(et les produits de ces transformations deux-à-deux).

Parmi les systèmes d'hyperquadriques invariants pour les transformations (5) et (6), se trouve le système

$$\lambda y_0 y_2 + 2 y_1 y_3 = 0,$$

qui donne naissance, dans l'espace S_3 primitif, au système

$$\lambda^2 \varphi_1 \varphi_2 + \lambda(\varphi_1 \psi_1 + \varphi_2 \psi_2 - \varphi_3 \psi_3) + \psi_1 \psi_2 = 0,$$

dont l'enveloppe est la surface Φ.

4. Nous allons partir maintenant de la surface F, de genres un, de S_5, dont nous écrirons les équations sous la forme plus symétrique

$$a_0 X_0^2 + a_1 X_1^2 + a_2 X_2^2 + a_3 X_3^2 + a_4 X_4^2 + a_5 X_5^2 = 0,$$
$$b_0 X_0^2 + b_1 X_1^2 + b_2 X_2^2 + b_3 X_3^2 + b_4 X_4^2 + b_5 X_5^2 = 0,$$
$$X_0 X_1 + X_2 X_3 + X_4 X_5 = 0.$$

Cette surface contient une involution abélienne d'ordre huit engendrée par les transformations involutives (homographies harmoniques de S_5)

$$(+ + + + - -), \quad (+ + - - + +), \quad (+ - + - + -)$$

et par leurs produits deux-à-deux. Il est facile de voir que cette involution possède un nombre fini de points unis. Le système linéaire d'hyperquadriques invariant pour les homographies précédentes et n'ayant pas pour points-base des points unis de l'involution, a pour équation

$$\lambda_0 X_0^2 + \lambda_1 X_1^2 + \lambda_2 X_2^2 + \lambda_3 X_3^2 + \lambda_4 X_4^2 + \lambda_5 X_5^2 = 0.$$

Rapportons projectivement ce système aux hyperplans d'un espace S_5 en posant

$$\rho Y_i = X_i^2.$$

A la surface F correspond la surface Φ d'équations

$$a_0 Y_0 + a_1 Y_1 + a_2 Y_2 + a_3 Y_3 + a_4 Y_4 + a_5 Y_5 = 0,$$
$$b_0 Y_0 + b_1 Y_1 + b_2 Y_2 + b_3 Y_3 + b_4 Y_4 + b_5 Y_5 = 0,$$
$$(Y_0 Y_1 + Y_2 Y_3 + Y_4 Y_5)^2 - 4(Y_2 Y_3 Y_4 Y_5 + Y_4 Y_5 Y_0 Y_2 + Y_0 Y_1 Y_2 Y_3) = 0.$$

La surface Φ est donc une surface du quatrième ordre et de genres un, appartenant à un espace S_3.

La dernière des équations de Φ peut s'écrire sous la forme

$$Y_0^2Y_1^2 + Y_2^2Y_3^2 + Y_4^2Y_5^2 - 2Y_2Y_3Y_4Y_5 - 2Y_4Y_5Y_0Y_1 - 2Y_0Y_1Y_2Y_3 = 0,$$

parfaitement analogue à l'équation de la surface Φ d'où nous sommes parti. Il suffit d'une substitution pour retrouver cette équation.

5. On peut interpréter $X_0, X_1, \ldots, X_5$ comme coordonnées d'une droite de l'espace S_3. La surface F est alors une congruence d'ordre et de classe quatre, transformée en elle-même par les homographies biaxiales harmoniques ayant comme axes les couples d'arêtes opposées du tétraèdre de référence et par les homologies harmoniques ayant pour centres les sommets de ce tétraèdre et pour plans les faces opposées.

Liége, le 21 mars 1939.

M. HAYEZ, Impr. de l'Académie royale, 112, rue de Louvain, Bruxelles.
(Domicile légal : rue de la Chancellerie, 4)