COMMUNICATIONS DES MEMBRES

GÉOMÉTRIE

Sur les transformations birationnelles involutives de l'espace ayant une courbe unie,

par Lucien Godeaux, correspondant de l'Académie

Les points unis d'une involution de l'espace peuvent être en nombre fini, ou former une courbe, ou une surface. Limitons-nous aux involutions du second ordre, engendrées par des transformations birationnelles involutives. Nous avons démontré qu'une involution du second ordre, n'ayant qu'un nombre fini de points unis, possède exactement huit points unis [1]. Nous nous proposons, dans cette note, d'établir une propriété des involutions du second ordre possédant une courbe unie; nous établirons le théorème suivant :

Si une involution du second ordre de l'espace possède une courbe unie (mais est dépourvue de surface unie) et si les droites déterminées par les couples de points de l'involution engendrent un complexe, celui-ci est linéaire.

Comme nous l'indiquerons à la fin de la note, trois exemples sont connus.

(1) *Sur les involutions du second ordre de l'espace n'ayant qu'un nombre fini de points unis* (*Bull. de la Soc. roy. des Sciences de Liége*, 1933, pp. 186-189).

1. Soit T une transformation birationnelle involutive de l'espace ayant une courbe unie Γ (et dépourvue de surface unie). Désignons par I_2 l'involution engendrée par la transformation T.

A un plan φ, T fait correspondre une surface Φ d'un certain ordre n. La surface $\varphi + \Phi$ est transformée en elle-même par T et nous désignerons par $|F|$ le système linéaire complet qu'elle détermine. Les surfaces F sont d'ordre $n+1$ et se comportent, le long des éléments fondamentaux de la transformation T, comme les surfaces Φ.

Deux surfaces F ont en commun, en dehors de la base, une courbe C, variable avec les surfaces, d'ordre $3n+1$. Le système $|F|$ est de degré $6n+2$.

Les surfaces F dégénérées en un plan φ et en sa transformée Φ, sont en nombre ∞^3; elles forment un système non linéaire et appartiennent à un système linéaire partiel, compris dans $|F|$ et que nous désignerons par $|F_0|$, composé au moyen de l'involution I_2. Les surfaces F_0 ne contiennent pas la courbe unie Γ.

La courbe (φ, Φ), intersection du plan φ et de sa transformée Φ, est transformée en elle-même par T et passe par les points de rencontre de la courbe unie Γ avec le plan φ. Les groupes de I_2 situés sur cette courbe (φ, Φ) forment une involution ayant un nombre pair de points unis, qui sont les points de rencontre de φ et de Γ. L'ordre de la courbe Γ est donc pair; nous le désignerons par $2m$. On voit d'ailleurs que les surfaces F rencontrent en général la courbe Γ en $4m$ points.

2. Les plans passant par une droite r forment un faisceau $|\varphi|$ et T leur fait correspondre des surfaces Φ formant un faisceau $|\Phi|$ projectif à $|\varphi|$. Le lieu des courbes (φ, Φ) communes aux éléments homologues de ces deux faisceaux projectifs est une surface F_1, d'ordre $n+1$, passant par r, et qui appartient au système linéaire

$$|F| = |\varphi + \Phi|.$$

La surface F_1 est transformée en elle-même par T et passe, simplement, par la courbe unie Γ.

Les surfaces F_1 sont en nombre ∞^4 et appartiennent totalement à un système linéaire partiel $|F_1|$ de $|F|$, composé au moyen de l'involution I_2.

Le système $|F|$, transformé en lui-même par T, contient donc deux systèmes linéaires partiels $|F_0|$, $|F_1|$, composés au moyen de l'involution I_2.

3. Les droites déterminées par les points des couples de I_2 forment soit une congruence, soit un complexe; supposons qu'elles forment un complexe Σ d'ordre μ.

Deux surfaces du système $|F_1|$ ont en commun une courbe C_1 variable avec les surfaces. Nous allons rechercher l'ordre de cette courbe.

Soient r, r' deux droites quelconques de l'espace, F_1 et F_1' les surfaces de $|F_1|$ que l'on en déduit par le procédé indiqué plus haut. La courbe C_1 commune à ces deux surfaces, est le lieu des points des couples de I_2 situés sur les droites du complexe Σ s'appuyant sur r et r'. Ces droites forment une réglée R d'ordre 2μ.

A la surface R, T fait correspondre une surface R' d'ordre $2\mu n$; la courbe C_1 appartient certainement à la courbe d'intersection (R, R') des surfaces R, R', mais elle ne coïncide pas avec cette courbe.

Laissons la droite r fixe et faisons varier r' d'une manière continue de façon à l'amener à rencontrer r. La surface R varie d'une manière continue et tend vers une surface formée de cône R_0 du complexe Σ ayant pour sommet le point rr' et du plan φ_0 des droites r, r' compté μ fois. Au cône R_0, d'ordre μ, T fait correspondre une surface R_0' d'ordre μn et au plan φ_0, une surface Φ_0 d'ordre n. La surface R' tend vers l'ensemble de la surface R_0' et de la surface Φ_0 comptée μ fois. La courbe C_1 tend vers une courbe dégénérée formée de la courbe (φ_0, Φ_0), d'ordre n, comptée μ^2 fois et d'une courbe appartenant, totalement ou non, à l'intersection du cône R_0 et de la surface R_0'. Soit μ' l'ordre de cette courbe. La courbe C_1 est donc d'ordre $\mu^2 n + \mu'$.

Observons maintenant que la courbe C_1, jointe à la courbe unie Γ, doit avoir le même ordre que les courbes C, partie variable de l'intersection de deux surfaces F. On a donc

$$2m + \mu^2 n + \mu' = 3n + 1. \qquad (1)$$

On en déduit que $3 - \mu^2$ doit être positif et que, par conséquent, on a $\mu = 1$. Le théorème énoncé au début de cette note est donc démontré.

4. Le complexe Σ est donc linéaire. Supposons que sur chaque rayon de ce complexe se trouvent ν couples de I_2.

Considérons un plan φ et soit P son foyer. La courbe (φ, Φ) est le lieu des points des couples de I_2 situés sur les droites du faisceau (P, φ). Le point P est un point simple de cette courbe et une droite du faisceau la rencontre encore en 2ν points. La courbe (φ, Φ) est donc d'ordre $2\nu + 1$ et on a

$$n = 2\nu + 1.$$

Reprenons les surfaces R et R'; R est actuellement une quadrique. Lorsque les droites r, r' se rencontrent, le cône R_0 est un plan et la surface R_0' une surface Φ. L'intersection complète du plan R_0 et de la surface R_0' fait partie de la limite de la courbe C_1. Celle-ci est donc d'ordre $2n$. La relation (1), appliquée dans le cas actuel, donne

$$2m = n + 1 = 2\nu + 2.$$

Si les rayons du complexe linéaire Σ *contiennent chacun* ν *groupes de l'involution* I_2, *la transformation* T *est d'ordre* $2\nu + 1$ *et la courbe unie* Γ *est d'ordre* $2\nu + 2$.

5. Plusieurs transformations du type envisagé dans cette note sont connues; elles correspondent aux valeurs $\nu = 1$, 3, 4.

La transformation qui fait se correspondre les points conjugués par rapport à deux polarités et à un système-nul a été signalée par Montesano [1] et étudiée par M^{lle} Paelinck [2]. Pour cette transformation, on a $\nu=1$, $n=3$ et la courbe unie est une biquadratique gauche.

Montesano [3] et après lui M. Snyder [4] ont considéré une involution d'ordre deux possédant une courbe unie d'ordre huit et de genre cinq. Pour cette transformation, on a $\nu=3$, $n=7$.

Enfin, un de nos élèves, M. Falla, a étudié une transformation birationnelle involutive du neuvième ordre; les surfaces du système homaloïdal de cette transformation passent quatre fois par une cubique gauche K, deux fois par trois cordes de cette cubique gauche et une fois par une courbe du douzième ordre [5]. On a $\nu=4$ et la courbe unie, du dixième ordre, se compose de quatre cordes de la cubique gauche K et de deux courbes infiniment voisines de K.

Liége, le 28 février 1939.

---

(1) *Su le trasformazioni involutorie dello spazio che determinano un complesso lineare di rette* (*Rendiconti della R. Accad. dei Lincei*, 1° sem. 1888).

(2) *Sur une transformation birationnelle involutive de l'espace* (*Mémoires de la Soc. roy. des Sciences de Liége*, 1932).

(3) *Una estenzione del problema della proiettività a gruppi di complessi e di congruenze di rette* (*Annali di Matematica*, s. 3, t. I, 1898, pp. 313-358).

(4) *On an involutorial transformation found by Montesano* (*Annals of Mathematics*, 1930, pp. 335-343). Voir aussi notre note *Sur les involutions du second ordre de l'espace* (*Bull. de l'Acad. roy. de Belgique*, 1934, pp. 976-985, 1077-1082).

(5) *Sur une involution du second ordre dont les groupes appartiennent aux rayons d'un complexe linéaire* (*Bulletin de l'Acad. roy. de Belgique*, 1936, pp. 606-614).