Sur la structure des points unis des homographies cycliques du plan

par Lucien GODEAUX, Membre de l'Académie

L'étude des involutions n'ayant qu'un nombre fini de points unis, appartenant à une surface algébrique, nous a conduit, voici quelques années, à l'étude des homographies planes cycliques non homologiques (1). Soit H une homographie de cette sorte, de période p, où p est un nombre premier. Cette homographie engendre dans le plan une involution I_p, d'ordre p, possédant trois points unis, sommets d'un triangle. Soit A un de ces points. Formons le système linéaire $|C|$, dépourvu de points-base, le plus ample possible, dont les courbes ont l'ordre p et sont transformées en elles-mêmes par H. Ce système appartient à l'involution I_p, c'est-à-dire que deux de ses courbes se rencontrent en p^2 points formant p groupes de cette involution. Si ν est la dimension de $|C|$, en rapportant projectivement les courbes C aux hyperplans d'un espace linéaire S_ν à ν dimensions, on obtient une surface Φ, normale, d'ordre p,

(1) *Sur les homographies planes cycliques* (*Mémoires de la Soc. roy. des Sciences de Liége*, 1928, pp. 1-26); *Sur les surfaces représentant les involutions planes engendrées par des homographies cycliques* (*Idem.*, 1930, pp. 1-21); *Sur les courbes tracées sur la surface représentant l'involution engendrée par une homographie plane cyclique* (*Idem.*, 1931, pp. 1-14).

image de l'involution I_p. Soient Γ les sections hyperplanes de Φ et A' le point homologue de A.

Les courbes C passant par A ont en ce point une certaine multiplicité et leurs tangentes sont confondues avec les droites a_1, a_2 joignant A aux autres points unis de l'involution. Appelons C' ces courbes. Sur une courbe C', le point A est l'origine de différentes branches, les unes tangentes à a_1, les autres à a_2. Considérons l'une de ces branches, tangentes à a_1 par exemple. Il existe, sur cette branche, un certain nombre de points infiniment voisins successifs, communs à toutes les courbes C'; soit A_{11} le dernier de ces points. Tous ces points sont unis pour l'involution I_p et le dernier est uni parfait en ce sens que tous les points qui lui sont infiniment voisins, comptés p fois, forment des groupes de I_p. Il peut d'ailleurs exister plusieurs branches d'une courbe C' passant par A_{11}; supposons qu'il en existe ν_{11}. Le point A_{11} est alors multiple d'ordre ν_{11} pour les courbes C'. L'examen des différentes branches des courbes C' d'origine A, tangentes à a_1, conduira ainsi à un certain nombre de points unis parfaits $A_{11}, A_{12}, \dots, A_{1\rho}$, multiples d'ordre $\nu_{11}, \nu_{12}, \dots, \nu_{1\rho}$ pour les courbes C'. De même, l'examen des branches des courbes C' tangentes à a_2 en A conduira à un certain nombre de points unis parfaits $A_{21}, A_{22}, \dots, A_{2\sigma}$ de I_p. Soient $\nu_{21}, \nu_{22}, \dots, \nu_{2\sigma}$ les multiplicités de ces points pour les courbes C'.

L'ensemble de ces branches et de ces points constitue la structure du point uni A.

Considérons une courbe C' et la section hyperplane Γ' de la surface Φ qui lui correspond. Aux points infiniment voisins de $A_{11}, A_{12}, \dots, A_{2\sigma}$ sur C' correspondent des points infinement voisins de A' sur Γ'. Il en résulte que le point A' est multiple d'ordre $\nu_{11} + \nu_{12} + \dots + \nu_{2\sigma}$ pour la surface Φ, le cône tangent en ce point à cette surface étant formé de $\rho + \sigma$ cônes, respectivement de l'ordre $\nu_{11}, \nu_{12}, \dots, \nu_{2\sigma}$.

Si nous projetons la surface Φ sur un hyperplan du point A', nous obtenons une surface Φ' sur laquelle le domaine du point A′ est représenté par une courbe γ_{11} d'ordre ν_{11}, une courbe γ_{12} d'ordre ν_{12}, ..., une courbe $\gamma_{2\sigma}$ d'ordre $\nu_{2\sigma}$. Ces courbes sont rationnelles et leur ensemble constitue la structure du point de diramation A′.

Dans nos travaux cités plus haut, nous avons indiqué une méthode permettant d'analyser les structures des points A et A′ dans chaque cas. Dans ce nouveau travail, nous avons cherché à déterminer les nombres ρ et σ.

Supposons que l'homographie soit représentée par les équations

$$x_1' : x_2' : x_3' = x_1 : \varepsilon x_2 : \varepsilon^\alpha x_3,$$

où ε est une racine primitive d'ordre p de l'unité et α un entier compris entre 1 et p. Posons

$$p = a\alpha + h, \qquad (h < \alpha).$$

Introduisons un nombre θ satisfaisant à la double inégalité

$$h < \theta(\alpha - h) < \alpha.$$

Si $\theta = 1$, nous avons établi antérieurement que $\rho = 1$, $\nu_{11} = a$. Supposons $\theta > 1$ et

$$\alpha > a + h + 1.$$

Supposons encore qu'il existe un nombre entier η tel que

$$\eta\theta(\alpha - h) < \alpha + (\eta - 1)h, \qquad (\eta + 1)(\alpha - h) > \alpha + \eta h.$$

Les cas suivants peuvent se présenter, A coïncidant avec le point $x_2 = x_3 = 0$:

1° On a

$$a + h > \theta(\alpha - a - h - 1).$$

a) $\rho = 2$, $\nu_{11} = a$, $\nu_{12} = \theta - 1$, $\sigma = 1$, $\nu_{21} = \eta$;

b) $\rho = 2$, $\nu_{11} = a$, $\nu_{12} = \theta - 1$, $\sigma = 2$, $\nu_{21} = 1$, $\nu_{22} = \eta - 1$;

2° On a

$$a + h < \theta(\alpha - a - h - 1).$$

a) $\rho = 3$, $\nu_{11} = a$, $\nu_{12} = \theta - 1$, $\nu_{13} = \eta - 1$; $\sigma = 1$, $\nu_{21} = 1$.

Dans le premier cas, la courbe γ_{12} rencontre en un point chacune des courbes γ_{11}, γ_{21}, mais ces courbes ne se rencontrent pas.

Dans le second cas, la courbe γ_{11} rencontre la courbe γ_{12} en un point, celle-ci rencontre la courbe γ_{22} en un point et enfin celle-ci rencontre la droite γ_{21} en un point. Il n'y a pas d'autre point de rencontre de ces courbes deux-à-deux.

Dans le troisième cas, γ_{11} rencontre γ_{12} en un point, γ_{12} rencontre γ_{13} en un point et enfin γ_{13} rencontre γ_{21} en un point. Il n'y a pas d'autre point commun à deux de ces quatre courbes.

L'étude des points unis des homographies cycliques du plan constitue le cas le plus simple du problème des involutions n'ayant qu'un nombre fini de points unis appartenant à une surface algébrique, problème qui a fait l'objet, à plusieurs reprises, de nos recherches (1). Cependant, ce cas particulier a une portée assez générale, car on peut y ramener le cas général, comme nous l'avons montré récemment (2).

I

1. Considérons l'homographie cyclique plane H d'équations

(1) Voir en particulier notre exposé sur *Les involutions cycliques appartenant à une surface algébrique* (*Actualités scient.*, Paris, Hermann, 1935); *Recherches sur les involutions cycliques appartenant à une surface algébrique* (*Bull. de l'Acad. roy. de Belgique*, 1930, pp. 450-467; 1931, pp. 1131-1150, 1356-1364; 1935, pp. 338-344; 1938, pp. 255-258); *Recherches sur les involutions cycliques du troisième ordre appartenant à une variété algébrique à trois dimensions* (*Annales de l'École normale supérieure*, 1937, pp. 55-79); *Sur les surfaces multiples ayant un nombre fini de points de diramation* (*Idem.*, 1938, pp. 193-222); *Sur la structure des points unis appartenant à une surface algébrique* (*Mémoires in-8° de l'Acad. de Belgique*, 1938, pp. 1-44); *Sur les points unis des involutions cycliques d'ordre* p^2 *appartenant à une surface algébrique* (*Bull. de l'Acad. roy. de Belgique*, 1940, pp. 28-43, 100-110, 115-128); *Sur les points de diramation des surfaces multiples* (*Bull. de la Soc. roy. des Sciences de Liége*, 1940, pp. 54-79, 128-137).

(2) *Sur la structure ...* (*loc. cit.*).

$$x_1' : x_2' : x_3' = x_1 : \varepsilon x_2 : \varepsilon^\alpha x_3,$$

où ε est une racine primitive de l'unité, d'ordre premier p supérieur à deux, et α un entier compris entre 1 et p. Désignons par I_p l'involution d'ordre p engendrée par H. Les points unis de cette involution sont les sommets du triangle de référence; nous étudierons la structure du point uni O_1 (1, 0, 0).

Soit $|C|$ le système linéaire le plus ample possible, dépourvu de points-base, appartenant à l'involution I_p, formé de courbes C d'ordre p. Il a pour équation

$$\sum \lambda_{ki}\, x_1{}^{i(\alpha-1)-(k-1)p}\, x_2^{kp-\alpha i}\, x_3^i = 0\,, \tag{1}$$

où k peut prendre les valeurs 0, 1, 2, ..., α et où, pour chaque valeur de k, i est un entier positif satisfaisant à la double inégalité

$$(k-1)\frac{p}{\alpha-1} \leqslant i \leqslant k\frac{p}{\alpha}\,.$$

Posons $p = 2n+1$; le système $|C|$ a la dimension $n+2$.

Rapportons projectivement les courbes C aux hyperplans d'un espace linéaire S_{n+2} à $n+2$ dimensions. Aux groupes de l'involution I_p correspondent les points d'une surface Φ d'ordre p, de S_{n+2}, image de cette involution.

Les équations paramétriques de la surface Φ peuvent s'écrire

$$\rho X_{ki} = x_1^{i(\alpha-1)-(k-1)p}\, x_2^{kp-\alpha i}\, x_3^i\,,$$

les X_{ki} étant les coordonnées projectives homogènes de S_{n+2}.

Nous désignerons par A_{ki} le sommet de la figure de référence de S_{n+2} dont toutes les coordonnées sont nulles sauf X_{ki}.

Au point uni O_1 correspond, sur la surface Φ, le point de diramation A_{00}, qui est multiple pour la surface. Aux sections de Φ par les hyperplans passant par A_{00} correspondent les courbes C passant par O_1, courbes que nous désignerons par C′ et qui sont caractérisées par le fait que le terme en x_1^p manque dans l'équation (1), c'est-à-dire par $\lambda_{00}=0$.

2. Les courbes C′ ont en O_1 une multiplicité au moins égale à deux, les tangentes étant confondues avec les droites $x_2=0$, $x_3=0$; elles ont donc en commun un point fixe infiniment voisin de O_1 sur chacune de ces droites. D'une manière générale, les courbes C′ ont en commun certaines suites de points fixes infiniment voisins successifs de O_1, le premier point de chaque suite se trouvant sur $x_2=0$ ou sur $x_3=0$. Tous les points de ces suites sont unis pour l'involution I_p et les derniers points des suites sont unis parfaits pour cette involution.

Supposons qu'il y ait m suites se terminant en des points unis parfaits P_1, P_2, ..., P_m. Cela signifie que, sur une courbe C′, le point O_1 est l'origine d'un certain nombre de branches : ν_1 passant par P_1, ν_2 par P_2, ..., ν_m par P_m. Ces branches sont tangentes en O_1 soit à $x_2=0$, soit à $x_3=0$. Les premières ont entre elles certains contacts et il en est de même des secondes.

Les points infiniment voisins de P_1, uni parfait pour I_p, sont unis pour cette involution. Aux ν_1 de ces points situés sur une courbe C′ correspondent, sur la section hyperplane de Φ correspondante, ν_1 points infiniment voisins de A_{00}. Le lieu de ces ν_1 points est situé sur un cône tangent à la surface Φ en A_{00} et ce cône est d'ordre ν_1. On voit donc que le point A_{00} est multiple d'ordre $\nu_1+\nu_2+\ldots+\nu_m$ pour la surface Φ, le cône tangent à cette surface en ce point étant formé d'un cône d'ordre ν_1, d'un cône d'ordre ν_2, ... et d'un cône d'ordre ν_m.

Projetons la surface Φ du point A_{00} sur l'hyperplan $X_{00}=0$ et soit Φ' la surface, d'ordre $p-m$, obtenue. Au domaine de A_{00} sur Φ correspond, sur Φ', l'ensemble de m courbes γ_1, γ_2, ..., γ_m, respectivement d'ordres ν_1, ν_2, ..., ν_m. Ces courbes correspondent aux domaines des points P_1, P_2, ..., P_m et sont rationnelles.

Pour obtenir les équations de ces courbes, ou des cônes qui les projettent de A_{00}, nous utiliserons les transformations quadratiques

$$x_1' : x_2' : x_3' = x_1^2 : x_1x_2 : x_2x_3, \tag{T$_1$}$$

$$x_1' : x_2' : x_3' = x_1^2 : x_2x_3 : x_1x_3. \tag{T$_2$}$$

La première fait correspondre au point infiniment voisin de O_1 sur $x_3 = 0$ le point $(1, 0, 0)$ et la seconde fait correspondre au point infiniment voisin de O_1 sur $x_2 = 0$ le point $(1, 0, 0)$.

Supposons que les branches des courbes C' passant par P_1 touchent $x_2 = 0$ en O_1. Effectuons la transformation T_2; aux courbes C' correspondent des courbes ayant une certaine multiplicité en $(1, 0, 0)$, les tangentes étant confondues avec $x_2 = 0$ et $x_3 = 0$. Si les branches passant par P_1 sont tangentes à $x_2 = 0$, on effectuera de nouveau T_2; dans le cas contraire, on effectuera T_1, et ainsi de suite. On parviendra finalement à des courbes ayant au point $(1, 0, 0)$, qui coïncide avec P_1, un point multiple d'ordre ν_1 à tangentes variables. Soit, pour fixer les idées,

$$x_1^{\nu} (\lambda_0 x_2^{\nu_1} + \lambda_1 x_2^{\nu_1 - 1} x_3 + \ldots + \lambda_{\nu_1} x_3^{\nu_1}) + \ldots = 0$$

l'équation de ces courbes, les termes non écrits contenant x_1 à une puissance inférieure à ν et $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_{\nu_1}$ étant $\nu_1 + 1$ des coefficients λ_{ki} (λ_{00} excepté) de l'équation (1). Les équations paramétriques de la surface Φ' pourront évidemment s'écrire

$$X_{00} = 0, \; \rho X_i = x_2^{\nu_1 - i} x_3^{i}, \; (i = 0, 1, \ldots, \nu_1) \ldots$$

Posons dans ces équations $x_3 = tx_2$ puis faisons tendre x_2 vers O. On obtiendra ainsi les équations de la courbe γ_1 sous la forme

$$\frac{X_0}{1} = \frac{X_1}{t} = \ldots = \frac{X_{\nu_1}}{t^{\nu_1}}.$$

toutes les quantités X_{ki} qui ne coïncident pas avec X_0, $X_1, \ldots, X_{\nu_1}$ étant nulles. On voit que γ_1 est une courbe rationnelle normale d'ordre ν_1.

On obtiendra de même les équations des courbes γ_2, $\ldots$, γ_m.

3. Ce qui précède montre qu'il faut étudier la singularité des courbes C' en O_1. Dans ce but, nous étudierons en premier lieu la formation de l'équation (1), où $\lambda_{00}=0$.

Posons

$$p=a\alpha+h,\ 2p=a_2\alpha+h_2,\ 3p=a_3\alpha+h_3,\ \ldots,$$
$$(\alpha-1)p=a_{\alpha-1}\alpha+h_{\alpha-1}.$$

h, h_2, h_3, $\ldots$, $h_{\alpha-1}$ étant inférieurs à α. Pour chaque valeur de k, le terme de l'équation (1) contenant x_1 à la plus haute puissance est donné par $i=a_k$. Cette puissance est

$$\varphi_k=a_k(\alpha-1)-(k-1)p.$$

Cherchons dans quelles conditions on peut avoir

$$\varphi_k\leqslant\varphi_{k+1},\qquad k\geqslant1.$$

En remplaçant p par $a\alpha+h$, cette inégalité donne

$$(\alpha-1)(a_{k+1}-a_k-a)\geqslant a+h.$$

On ne peut avoir l'égalité, car alors si $\alpha>2$, $\alpha-1$ diviserait $a+h$ et par suite p, qui ne serait pas premier. D'autre part, si $\alpha=2$, la question n'a plus de sens car $k\leqslant2$ et $\varphi_2=0$, $\varphi_1>0$.

Posons

$$a_{k+1}=a_k+a+\lambda,\qquad(\lambda\geqslant1).$$

On a

$$(k+1)p=(a_k+a+\lambda)\alpha+h_{k+1}=(a_k+a)\alpha+h_k+h,$$

d'où

$$\lambda\alpha=h+h_k-h_{k+1}.$$

Le second membre est inférieur à 2α, donc on a $\lambda=1$. Par suite,

$$a_{k+1}=a_k+a+1,\qquad\alpha>a+h+1.$$

Inversement, dans ces conditions, on a $\varphi_k<\varphi_{k+1}$.

Voyons maintenant dans quelles conditions on a simultanément

$$\varphi_k \geqslant \varphi_{k+1}, \qquad \alpha > a + h + 1.$$

L'inégalité donne

$$(\alpha - 1)(a_{k+1} - a_k - a) \leqslant a + h.$$

$\alpha - 1$ étant supérieur à $a + h$ et a_{k+1} étant au moins égal à $a_k + a$, on a

$$a_{k+1} = a_k + a$$

et l'égalité ne peut avoir lieu.

Inversement, les hypothèses

$$a_{k+1} = a_k + a, \qquad \alpha > a + h + 1$$

entraînent $\varphi_k > \varphi_{k+1}$.

4. Supposons qu'il existe un entier θ, *supérieur à l'unité*, tel que l'on ait

$$\varphi_1 < \varphi_2 < \dots < \varphi_\theta, \; \varphi_\theta > \varphi_{\theta+1}.$$

D'après ce qui précède, on a tout d'abord

$$a_2 = 2a + 1, \; a_3 = a_2 + a + 1 = 3a + 2, \; \dots, \; a_\theta = \theta a + \theta - 1$$

et

$$\alpha > a + h + 1.$$

On en déduit

$$h_2 = 2h - \alpha, \; h_3 = 3h - 2\alpha, \; \dots, \; h_\theta = \theta h - (\theta - 1)\alpha$$

et, h_1, h_2, ..., h_θ étant positifs,

$$\alpha < 2h, \; 2\alpha < 3h, \; \dots, \; (\theta - 1)\alpha < \theta h.$$

La dernière inégalité entraîne d'ailleurs les précédentes.

L'inégalité $\varphi_\theta > \varphi_{\theta+}$ conduit à

$$a_{\theta+1} = a_\theta + a = (\theta + 1)a + \theta - 1.$$

On a donc

$$h_{\theta+1} = (\theta + 1)h - (\theta - 1)\alpha$$

et, comme le premier membre doit être inférieur à α, on en déduit

$$(\theta+1)h<\theta\alpha.$$

Le nombre entier θ est donc défini par la double inégalité

$$h<\theta(\alpha-h)<\alpha.$$

5. Supposons que θ soit compris au moins deux fois dans $\alpha-1$. Nous avons

$$a_{\theta+1}=(\theta+1)a+\theta-1,\ a_{\theta+2}=(\theta+2)a+\theta,\ \dots,$$
$$\dots,\ a_{2\theta}=2\theta a+2\theta-2$$

et

$$h_{\theta+1}=(\theta+1)h-(\theta-1)\alpha,\ h_{\theta+2}=(\theta+2)h-\theta\alpha,\ \dots,$$
$$\dots,\ h_{2\theta}=2\theta h-(2\theta-2)\alpha.$$

On vérifie en effet aisément que l'on a

$$0<(\theta+i)h-(\theta-i)\alpha<\alpha, \qquad \text{pour } i=1,\ 2,\ \dots,\ \theta.$$

On aura donc

$$\varphi_{\theta+1}<\varphi_{\theta+2}<\dots<\varphi_{2\theta}.$$

On peut avoir soit

1°
$$a_{2\theta+1}=(2\theta+1)a+2\theta-1,$$
$$h_{2\theta+1}=(2\theta+1)h-(2\theta-1)\alpha,$$

soit

2°
$$a_{2\theta+1}=(2\theta+1)a+2\theta-2,$$
$$h_{2\theta+1}=(2\theta+1)h-(2\theta-2)\alpha.$$

En exprimant que h_{+1} doit être compris entre 0 et α, on trouve que dans le premier cas, on a

$$2\theta(\alpha-h)<\alpha+h,$$

dans le second,

$$2\theta(\alpha-h)>\alpha+h,$$

et réciproquement.

Ou d'autre part, dans tous les cas,

$$a_{2\theta+2}=(2\theta+2)a+2\theta-1,\ h_{2\theta+2}=(2\theta+2)h-(2\theta-1)\alpha.$$

Par conséquent, dans le premier cas, il vient

$$\varphi_{2\theta}<\varphi_{2\theta+1},\ \varphi_{2\theta+1}>\varphi_{2\theta+2}$$

et dans le second,

$$\varphi_{2\theta} > \varphi_{2\theta+1}, \quad \varphi_{2\theta+1} < \varphi_{2\theta+2}.$$

Supposons maintenant que $\alpha - 1$ comprenne au moins trois fois θ. Nous avons

$$a_{2\theta+3} = (2\theta + 3)\,a + 2\theta, \ldots, a_{3\theta} = 3\theta a + 3\theta - 3,$$

d'où

$$\varphi_{2\theta+2} < \varphi_{2\theta+3} < \cdots < \varphi_{3\theta}.$$

En raisonnant comme ci-dessus, on aura

$$a_{3\theta+1} = (3\theta + 1)\,a + 3\theta - 2, \quad h_{3\theta+1} = (3\theta + 1)\,h - (3\theta - 2)\,\alpha \quad \text{pour} \quad 3\theta\,(\alpha - h) < 2\alpha + h.$$

ou

$$a_{3\theta+1} = (3\theta + 1)\,a + 3\theta - 3, \quad h_{3\theta+1} = (3\theta + 1)\,h - (3\theta - 3)\,\alpha \quad \text{pour} \quad 3\theta\,(\alpha - h) > 2\alpha + h.$$

Ensuite, on aura

$$a_{3\theta+2} = (3\theta + 2)\,a + 3\theta - 1, \quad h_{3\theta+2} = (3\theta + 2)\,h - (3\theta - 1)\,\alpha \quad \text{pour} \quad 3\theta\,(\alpha - h) < \alpha + 2h$$

ou

$$a_{3\theta+2} = (3\theta + 2)\,a + 3\theta - 2, \quad h_{3\theta+2} = (3\theta + 2)\,h - (3\theta - 2)\,\alpha \quad \text{pour} \quad 3\theta\,(\alpha - h) > \alpha + 2h.$$

Dans tous les cas, on aura enfin

$$a_{3\theta+3} = (3\theta + 3)\,a + 3\theta - 1, \quad h_{3\theta+3} = (3\theta + 3)\,h - (3\theta - 1)\,\alpha.$$

Trois cas peuvent donc se présenter :

1° $3\theta\,(\alpha - h) < \alpha + 2h$, $a_{3\theta+1} = (3\theta + 1)\,a + 3\theta - 2$,
$a_{3\theta+2} = (3\theta + 2)\,a + 3\theta - 1$,

$$\varphi_{3\theta} < \varphi_{3\theta+1} < \varphi_{3\theta+2}, \quad \varphi_{3\theta+2} > \varphi_{3\theta+3}.$$

2° $\alpha + 2h < 3\theta\,(\alpha - h) < 2\alpha + h$, $a_{3\theta+1} = (3\theta + 1)\,a + 3\theta - 2$,
$a_{3\theta+2} = (3\theta + 2)\,a + 3\theta - 2$,

$$\varphi_{3\theta} < \varphi_{3\theta+1}, \quad \varphi_{3\theta+1} < \varphi_{3\theta+2}, \quad \varphi_{3\theta+2} < \varphi_{3\theta+3}.$$

3° $2\alpha + h < 3\theta\,(\alpha - h)$, $a_{3\theta+1} = (3\theta + 1)\,a + 3\theta - 3$,
$a_{3\theta+2} = (3\theta + 2)\,a + 3\theta - 2$,

$$\varphi_{3\theta} > \varphi_{3\theta+1}, \quad \varphi_{3\theta+1} < \varphi_{3\theta+2} < \varphi_{3\theta+3}.$$

Dans le premier cas, on a nécessairement

$$2\theta(\alpha - h) < \alpha + h, \quad a_{2\theta+1} = (2\theta + 1)a + 2\theta - 1,$$

dans le troisième,

$$2\theta(\alpha - h) > a + h, \quad a_{2\theta+1} = (2\theta + 1)a + 2\theta - 2.$$

6. Admettons que $\alpha - 1$ contienne au moins t fois θ, t étant un entier supérieur à l'unité. On peut poser

$$a_{t\theta+j} = (t\theta + j)a + t\theta + j - l,$$

où l est un entier positif et j un entier positif ou nul, inférieur à θ.

La quantité

$$h_{t\theta+j} = (t\theta + j)h - (t\theta + j - l)\alpha$$

doit être comprise entre 0 et α; on a donc

$$(l-j-1)\alpha + jh < t\theta(\alpha - h) < (l-j)\alpha + jh.$$

La quantité $t\theta(\alpha - j)$ étant comprise entre th et $t\alpha$, on a

$$(l-j)\alpha + jh > th, \qquad (l-j-1)\alpha + jh < t\alpha.$$

Le nombre l ne peut donc prendre que les valeurs t et $t+1$.

Supposons $l = t$. On a

$$a_{t\theta+j} = (t\theta + j)a + t(\theta - 1) + j, \quad h_{t\theta+j} = (t\theta + j)h - \\ - [t(\theta - 1) + j]\alpha, \; t\theta(\alpha - h) < (t - j)\alpha + jh, \; (j < t). \quad \text{(I)}$$

Observons que si l'inégalité (I) est vérifiée pour une valeur de j, elle est également vérifiée pour les valeurs inférieures de j.

Si nous supposons maintenant $l = t + 1$, nous aurons

$$a_{t\theta+j} = (t\theta + j)a + t(\theta - 1) + j - 1, \; h_{t\theta+j} = (t\theta + j)h - \\ - [t(\theta - 1) + j - 1]\alpha, \; t\theta(\alpha - h) > (t - j)\alpha + jh, \; (j > 0). \quad \text{(II)}$$

Si cette inégalité est vérifiée pour une valeur de j, elle l'est pour les valeurs supérieures de j.

Cela étant, supposons que χ soit la plus grande valeur de j satisfaisant à l'inégalité (I) et que χ soit inférieure à θ.

On a

$$(t-\chi-1)\alpha+(\chi+1)h<t\theta(\alpha-h)<(t-\chi)\alpha+\chi h,$$
$$\varphi_{t\theta}<\varphi_{t\theta+1}<\cdots<\varphi_{t\theta+\chi},\ \varphi_{t\theta+\chi}>\varphi_{t\theta+\chi+1},$$
$$\varphi_{t\theta+\chi+1}<\varphi_{t\theta+\chi+2}<\cdots<\varphi_{(t+1)\theta}.$$

Observons que l'on a nécessairement

$$(t-\chi-2)\alpha+(\chi+1)h<(t-1)\theta(\alpha-h)<(t-\chi)\alpha+(\chi-1)h,$$

d'où

$$\varphi_{(t-1)\theta}<\varphi_{(t-1)\theta+1}<\cdots<\varphi_{(t-1)\theta+\chi-1},$$
$$\varphi_{(t-1)\theta+\chi+1}<\varphi_{(t-1)\theta+\chi+2}<\cdots<\varphi_{t\theta}.$$

Lorsque t est inférieur ou égal à θ, la plus grande valeur possible pour χ est $\chi=t-1$. Supposons que l'on ait $t>\theta$ et $\chi>\theta-1$. On a donc

$$a_{(t+1)\theta-1}=[(t+1)\theta-1]\,a+(t+1)(\theta-1);$$

on vérifie aisément que l'on a nécessairement

$$a_{(t+1)\theta}=a_{(t+1)\theta-1}+a,$$

d'où

$$\varphi_{(t+1)\theta-1}>\varphi_{(t+1)\theta}.$$

On aura également

$$(t+1)\theta(\alpha-h)<(t-\theta+2)\alpha+(\theta-1)h,$$

par conséquent

$$\varphi_{(t-1)\theta}<\varphi_{(t+1)\theta+1}<\cdots<\varphi_{(t+2)\theta-1},\ \varphi_{(t+2)\theta-1}>\varphi_{(t+2)\theta}.$$

7. Pour notre objet, il convient de rechercher la plus haute valeur de φ_k.

Observons que dans le terme de l'équation (1) donné par $i=a_k$, l'exposant de x_2 est égal à h_k et celui de x_3 à a_k.

On doit donc avoir

$$0\leqslant a_k+h_k\leqslant p$$

et par conséquent

$$0\leqslant(t\theta+j)(a+h)-(t\theta+j-l)(\alpha-1)\leqslant p,\qquad (l=t \text{ ou } t+1).$$

En particulier, pour $k=\theta$, on a

$$a+h>(\theta-1)(\alpha-a-h-1),$$

ce qui peut s'écrire

$$\alpha-1-\theta(\alpha-a-h-1)>0.$$

$$\alpha-1>(\theta+1)(\alpha-a-h-1),$$

Nous avons

$$\varphi_\theta = a(\alpha-1)+(\theta-1)(\alpha-a-h-1),$$

$$\varphi_{t\theta+j}=(a-l+1)(\alpha-1)+(t\theta+j-1))(\alpha-a-h-1).$$

donc

$$\varphi_\theta-\varphi_{t\theta+j}=(l-1)(\alpha-1)-[(t-1)\theta+j](\alpha-a-h-1).$$

Supposons que nous ayons $l=t$; alors

$$\varphi_\theta-\varphi_{t\theta+j}=(t-1)(\alpha-1)-[(t-1)\theta+j](\alpha-a-h-1).$$

Si $t\leqslant\theta$, la plus grande valeur de $\varphi_{t\theta+j}$ est obtenue pour $j=t-1$. On a

$$\varphi_\theta-\varphi_{t\theta+t-1}=(t-1)[\alpha-1-(\theta+1)(\alpha-a-h-1)].$$

Si $t>\theta$, la plus grande valeur de $\varphi_{t\theta+j}$ est obtenue pour $j=\theta-1$. On a alors

$$\varphi_\theta-\varphi_{(t+1)\theta-1}=(t-1)[\alpha-1-(\theta+1)(\alpha-a-h-1]+ \\ +(t-\theta)(\alpha-a-h-1).$$

Supposons maintenant que nous ayons $l=t+1$. On a

$$\varphi_\theta-\varphi_{t\theta+j}=t(\alpha-1)-[(t-1)\theta+j](\alpha-a-h-1).$$

Si l'on écrit cette expression sous la forme

$$\varphi_\theta-\varphi_{t\theta+j}=(t-1)[\alpha-1-\theta(\alpha-a-h-1)]+ \\ +\alpha-1-j(\alpha-a-h-1)$$

et si l'on remarque que j est au plus égal à $\theta-1$, on voit que le second membre est toujours positif.

On voit donc que si l'on a

$$\alpha-1>(\theta+1)(\alpha-a-h-1),$$

c'est-à-dire

$$a+h>\theta(\alpha-a-h-1),$$

c'est le terme donné par $k=\theta$, $i=\theta a+\theta-1$ qui contient, dans l'équation des courbes C', x_1 à la plus haute puissance. Dans le cas opposé, il n'en est plus nécessairement de même.

On remarquera que l'on ne peut avoir

$$a+h=\theta(\alpha-a-h-1),$$

p étant un nombre premier.

8. On peut obtenir une expression de α de la manière suivante : Posons

$$p=(a+1)\nu+h', \qquad (h'\leqslant a).$$

De

$$\alpha>a+h+1,$$

on déduit

$$(\alpha-1)(a+1)>p>(a+1)\nu$$

et on est donc conduit à poser

$$\alpha=\nu+1+\mu.$$

On a alors

$$(a+1)(\nu+\mu)>(a+1)\nu+h',$$

d'où

$$(a+1)\mu>h'$$

et $\mu\geqslant 1$.

On peut d'ailleurs établir une propriété caractéristique de μ. Nous avons

$$p=(a+1)(\alpha-\mu-1)+h'=a\alpha+h,$$

d'où l'on déduit

$$\mu(a+1)<\alpha-h<(\mu+1)(a+1).$$

II

9. Nous allons en premier lieu étudier la structure du point uni O_1 de l'involution I_p dans les hypothèses suivantes :

1° Il existe un entier θ *supérieur à l'unité* tel que

$$h < \theta(\alpha - h) < \alpha.$$

2° On a

$$a + h > \theta(\alpha - a - h - 1).$$

3° On a en outre

$$\alpha > a + h + 1.$$

Nous avons vu que dans ces conditions, c'est le terme $k = \theta$, $i = a_\theta$ qui, dans l'équation des courbes C′, c'est-à-dire dans l'équation (1) où l'on a posé $\lambda_{00} = 0$, contient x_1 à la plus haute puissance. Ce terme s'écrit

$$x_1^{a(\alpha-1)+(\theta-1)(\alpha-a-h-1)}\, x_2^{\alpha-\theta(\alpha-h)}\, x_3^{\theta(a+1)-1}.$$

Les courbes C′ possèdent donc en O_1 la multiplicité $\alpha - 1 - \theta(\alpha - a - h - 1)$; il y a en ce point $\alpha - \theta(\alpha - h)$ tangentes confondues avec $x_2 = 0$ et $\theta(a+1) - 1$ avec $x_3 = 0$.

Opérons, sur les courbes C′, λ fois la transformation T_1, c'est-à-dire

$$x_1' : x_2' : x_3' = x_1^{\lambda+1} : x_1^\lambda x_2 : x_2^\lambda x_3.$$

L'équation transformée s'écrit

$$\Sigma \lambda_{ki} x_1^{\lambda(p-i)+i(\alpha-1)-(k-1)p}\, x_2^{kp-(\alpha-\lambda)i}\, x_3^i = 0. \qquad (2)$$

Observons tout d'abord que, dans les différents termes qui correspondent à la même valeur de k, c'est celui qui est donné par la plus grande valeur possible de i qui contient x_1 à la plus haute puissance, pour $\lambda < \alpha - 1$. Désignons par φ_k' la puissance de x_1 dans le terme qui correspond à $i = a_k$.

En posant

$$p = (a+1)\nu + h', \qquad \alpha = \nu + \mu + 1,$$

nous avons

$$\varphi_1' = \lambda[(a+1)\nu + h' - a] + a(\nu + \mu),$$

$$\varphi_\theta' = \lambda[(a+1)(\nu - \theta) + h' + 1] + $$
$$+ (\nu + \mu)[\theta(a+1) - 1] - (\theta - 1)[(a+1)\nu + h'].$$

Pour $\lambda=1, 2, \ldots, \mu-1$, la seconde expression est supérieure à la première, mais pour $\theta=\mu$, on a $\varphi_1' > \varphi_\theta$. Il est facile de voir que, pour $\lambda=1, 2, \ldots, \mu-1$, le terme de degré le plus élevé en x_1 est donné par $k=\theta$, $i=a_\theta$; pour $\lambda=\mu$, par $k=1$, $i=a$.

Pour $\lambda=\mu$, les termes de l'équation (2) sont tous divisibles par la puissance

$$\alpha-1-\theta(\alpha-a-h-1)+(\mu-1)[\theta(a+1)-1]= \\ =\nu+1-\theta(a+1-h').$$

de x_2. Par conséquent, les courbes C′ ont en commun une suite de μ points fixes, infiniment voisins successifs de O_1, le premier étant sur la droite $x_3=0$ et les $\mu-1$ premiers étant multiples d'ordre $\theta(a+1)-1$.

Nous désignerons par O_{13} le μ^c point. Le terme de puissance la plus élevée en x_1 est

$$\lambda_{1a}\, x_1^{\mu p+a\nu}\, x_2^{(\theta-1)(a-h'+1)}\, x_3^{a},$$

par conséquent, le point O_{13} est multiple d'ordre $(\theta-1)$ $(a-h'+1)+a$ pour les courbes C′. Après la transformation T_1^{μ}, ce point coïncide avec le point $(1, 0, 0)$. En ce point, les courbes C′ ont $(\theta-1)(a-h'+1)$ tangentes confondues avec $x_2=0$, a avec $x_3=0$.

10. Reprenons l'équation (2) et recherchons s'il existe une valeur de λ pour laquelle les termes donnés par $k=1$, $i=0$ et $i=a$ contiennent x_1 à la même puissance. On trouve $\lambda=\alpha-1$. Pour cette valeur de λ, tous les termes donnés par $k=1$, $i=0, 1, \ldots, a$ contiennent d'ailleurs x_1 à la même puissance, $(\alpha-1)p$.

On vérifie sans peine que les autres termes de l'équation obtenue contiennent x_1 à des puissances moindres que $(\alpha-1)p$. D'autre part, tous les termes de l'équation sont divisibles par la puissance $p-a$ de x_2. On en conclut que les courbes C′ possèdent $\alpha-1$ points multiples d'ordre a, infiniment voisins successifs de O_{13}, le premier se trouvant sur la droite $x_3=0$.

Après la transformation $T_1^{\alpha-1}$ et division par la puissance $p-a$ de x_2, l'équation des courbes C′ s'écrit

$$x_1^{p(\alpha-1)}(\lambda_{1a}x_3^a+\lambda_{1a-1}x_2x_3^{a-1}+\ldots+\lambda_{10}x_2^a)+$$
$$+x_1^{p(\alpha-2)}x_2^{p-(\alpha+1)}x_3^{a+1}(\lambda_{2a_2}x_3^a+\ldots)+\ldots+$$
$$+x_1^{p(\alpha-\theta)}x_2^{(\theta-1)(p-a-1)}x_3^{(\theta-1)(a+1)}\text{(polynome de degré } a \text{ en } x_2, x_3)$$
$$+x_1^{p(\alpha-\theta-1)}x_2^{\theta(p-a-1)}x_3^{\theta(a+1)}\text{(polynome de degré } a-1 \text{ en } x_2, x_3)+\ldots=0\,.$$

Les courbes C′ ont, au point (1, 0, 0), que nous désignerons par O_{113}, la multiplicité a et des tangentes variables. Ce point est uni parfait pour l'involution I_p et fait suite aux $\alpha-1$ points succédant à O_{13} dont il vient d'être question.

Au domaine du point O_{113} correspond, sur la surface Φ', la courbe rationnelle normale d'ordre a, d'équations

$$\left\| \begin{matrix} X_{1a} & X_{1a-1} \ldots X_{11} \\ X_{1a-1} & X_{1a-2} \ldots X_{10} \end{matrix} \right\| = 0\,,$$

toutes les autres coordonnées X_{ki} étant nulles.

Nous désignerons cette courbe par γ_a.

11. Revenons à l'équation (2), que nous supposerons débarrassée du facteur x_2 commun à tous ses termes et opérons, sur cette équation, la transformation T_2. Nous écrirons l'équation obtenue sous la forme

$$\Sigma\,\lambda_{ki}\,x_1^{\alpha_1}\,x_2^{\alpha_2}\,x_3^{\alpha_3}=0\,, \tag{3}$$

où

$$\alpha_1=2p(\mu-k-1)+i(2\nu-1),$$
$$\alpha_2=kp-(\nu+1)(i+1)+\theta(a-h'+1),$$
$$\alpha_3=kp-(\nu+1)(i+1)+i-h'+1.$$

En écrivant cette équation, on a tenu compte que tous les termes de l'équation transformée contiennent x_3 à la puissance $(\theta-1)(a-h'+1)+a$, égale à la multiplicité de O_{13} pour les courbes C′; on a divisé tous les termes par ce facteur. On pourrait également diviser tous les termes de l'équation par x_1^{ν}; nous ne le faisons pas, cela n'ayant aucune influence pour la suite.

On vérifie que les termes contenant x_1 à la plus haute puissance dans l'équation (3) sont donnés par $k=1$, $i=a$; $k=2$, $i=a_2$; ...; $k=\theta$, $i=a_\theta$. Ces puissances sont respectivement

$$\varphi_1''=2\mu p+a(2\nu+1), \varphi_2''=2(\mu-1)p+(2a+1)(2\nu+1), \dots,$$
$$\varphi_\theta''=2(\mu-\theta+1)p+(a\theta+\theta-1)(2\nu+1).$$

Pour que la première de ces expressions soit inférieure ou égale à la dernière, on doit avoir

$$2p(\theta-1)\leqslant(a+1)(2\nu+1)(\theta-1)$$

c'est-à-dire, puisque θ est par hypothèse supérieur à l'unité,

$$2p\leqslant(a+1)(2\nu+1).$$

Cela conduit à $2h'\leqslant a+1$.

L'égalité ne peut avoir lieu que pour $h'=a=1$, p étant premier. Sous cette hypothèse, toutes les expressions φ_1'', φ_2'', ..., φ_θ'' sont égales et on a précisément

$$\varphi_1''=\varphi_2''=\dots=\varphi_\theta''=(2\mu-1)(2\nu+1).$$

Le point considéré est uni parfait pour l'involution I_p et multiple d'ordre $\theta-1$ pour les courbes C'.

Lorsque l'on a $2h'<a+1$, le point considéré n'est pas uni parfait pour l'involution. Nous ne nous arrêterons pas davantage sur ces deux cas, qui rentrent comme cas particuliers dans celui qui va être traité dans un instant.

Lorsque l'on a $2h'>a+1$, la suite φ_1'', φ_2'', ..., φ_θ'' est décroissante et le terme contenant x_1 à la plus haute puissance est donc

$$\lambda_{1a}\, x_1^{2\mu p+a(2\nu+1)}\, x_2^{(\theta-1)(a-h'+1)};$$

il ne contient pas x_3 et par conséquent, le point infiniment voisin de O_{13} sur $x_2=0$ est multiple d'ordre $(\theta-1)(a-$ $-h'+1)$. Le point $(1, 0, 0)$, qui lui correspond après la transformation T_2, a toutes ses tangentes confondues avec $x_2=0$.

12. Au lieu d'opérer la transformation T_2 sur les courbes (2), opérons la λ fois, c'est-à-dire opérons la transformation

$$x_1' : x_2' : x_3' = x_1^{\lambda+1} : x_2\, x_3^{\lambda} : x_1^{\lambda}\, x_3 \,.$$

Dans l'équation transformée, les termes contenant x_1 à la plus haute puissance sont encore donnés par $k=1$, $i=a$; $k=2$, $i=a_2$; ...; $k=\theta$, $i=a_\theta$ et ces puissances sont respectivement

$$\varphi_1'' = (\lambda+1)\,\mu p + a\,[(\lambda+1)\,\nu + \lambda]\,,$$
$$\varphi_2'' = (\lambda+1)\,(\mu-1)\,p + (2a+1)\,[(\lambda+1)\,\nu + \lambda]\,,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\varphi_\theta'' = (\lambda+1)\,(\mu-\theta+1)\,p + (a\theta+\theta-1)\,[(\lambda+1)\,\nu + \lambda]\,.$$

Cherchons la plus petite valeur de λ pour laquelle on a $\varphi_1'' \leqslant \varphi_\theta''$. On doit avoir

$$(\lambda+1)p(\theta-1) \leqslant (a+1)\,[\,(\lambda+1)\nu+\lambda]\,(\theta-1)\,.$$

Après division par $\theta-1 \geqslant 1$, on a

$$h' \leqslant \lambda(a-h'+1)\,.$$

L'égalité, en tenant compte du fait que p est premier, entraîne $\lambda=a=h'$. On a alors $a\mu+h=\nu$ et, comme μ est au moins égal à l'unité, $\nu > a$.

Dans ces conditions, on a

$$\varphi_1'' = \varphi_2'' = \ldots + \varphi_\theta'' = p\,[(a+1)\,\mu + a]$$

et le point (1, 0, 0) est uni parfait pour l'involution I_p. Le point infiniment voisin de O_{13} sur la droite $x_2=0$ est multiple d'ordre $\theta-1$ pour les courbes C'.

Le point O_{13} est actuellement multiple d'ordre $a+\theta-1$ pour les courbes C'. L'équation obtenue après les différentes transformations effectuées a tous ses termes multiples de x_3 à la puissance $a+\theta-1+(a-1)(\theta-1)=a\theta$. Après cette réduction, l'équation s'écrit

$$x_1^{p(a\mu+a+\mu)}(\lambda_{1a}\, x_2^{\theta-1} + \lambda_{2,2a+1}\, x_2^{\theta-2} x_3 + \ldots$$
$$\ldots + \lambda_{\theta,\, a\theta+\theta-1}\, x_3^{\theta-1}) + \ldots = 0\,,$$

les termes non écrits contenant x_1 à une puissance inférieure à $p(a\mu + a + \mu)$.

On voit donc qu'au point O_3 sont infinement voisins successifs a points multiples d'ordre $\theta - 1$, dont le premier est sur la droite $x_2 = 0$. Le dernier de ces points est uni parfait pour l'involution I_p.

13. Supposons maintenant qu'il ne soit pas possible de trouver une valeur de λ donnant $h' = \lambda(a + 1 - h')$. Définissons un entier τ pour la condition

$$(\tau - 1)(a - h' + 1) < h' < \tau(a - h' + 1).$$

Faisons $\lambda = \tau$. L'équation des courbes transformées des courbes C', débarrassée de x_3 à la puissance $\tau(\theta - 1)(a + 1 - h') + a$, commun à tous les termes, s'écrit sous la forme

$$\Sigma\lambda_{ki}\, x_1^{\alpha_1}\, x_2^{\alpha_2}\, x_3^{\alpha_3} = 0$$

moyennant

$$\begin{aligned}
\alpha_1 &= (\tau + 1)p(\mu - k + 1) + i[(\tau + 1)\nu + \tau],\\
\alpha_2 &= kp - (\nu + 1)(i + 1) + \theta(a - h' + 1),\\
\alpha_3 &= \tau[kp - (\nu + 1)(i + 1) + a - h' + 1] + i - a.
\end{aligned}$$

Le terme de puissance maximum en x_1 sera donné par $k = \theta$, $i = a_\theta$. Pour ce terme, on a

$$\begin{aligned}
\alpha_1 &= (\tau + 1)p(\mu - \theta + 1) + (a\theta + \theta - 1)[(\tau + 1)\nu + \tau],\\
\alpha_2 &= 0,\\
\alpha_3 &= (\theta - 1)[a + 1 - \tau(a - h' + 1)].
\end{aligned}$$

Au point O_{13} font donc suite τ points fixes infiniment voisins successifs, appartenant aux courbes C', le premier étant sur la droite $x_2 = 0$ pour les courbes (2). Les $\tau - 1$ premiers de ces points sont multiples d'ordre $(\theta - 1)(a - h' + 1)$ pour les courbes C', le dernier, que nous désignerons par O_{132}, est multiple d'ordre

$$(\theta - 1)[a + 1 - \tau(a - h' + 1)].$$

Dans l'équation des dernières transformées des courbes C', le point O_{132} coïncide avec le point $(1, 0, 0)$. Les tangentes en ce point sont toutes confondues avec $x_3=0$. Il en résulte que les courbes C' ont toutes en commun le point infiniment voisin de O_{132} sur la droite $x_3=0$. Nous sommes donc conduits à effectuer la transformation T_2.

Effectuons λ fois l'équation T_2. L'équation des courbes transformées s'écrira

$$\Sigma \lambda_{ki}\, x_1^{\alpha_1}\, x_2^{\alpha_2}\, x_3^{\alpha_3} = 0\,,$$

où l'on a

$$\begin{aligned}\alpha_1 = (\lambda+1)\,[\,(\tau+1)p(\mu-k+1) + i\{\,(\tau+1)\nu+\tau\}\,] &+\\ +\lambda[kp-(\nu+1)\,(i+1) + \theta(a-h'+1]&.\end{aligned}$$

Les valeurs de α_1 qui correspondent aux termes $k=1$, $i=a$; $k=2$, $i=a_2$; ...; $k=\theta$, $i=a_\theta$ sont respectivement

$$\begin{aligned}\varphi_1''' &= (\lambda+1)\,[\,(\tau+1)p\mu + a\{\,(\tau+1)\nu+\tau\}\,] +\\ &\quad +\lambda[p-(\nu+1)\,(a+1) + \theta(a-h'+1)\,],\\ \varphi_2''' &= (\lambda+1)\,[\,(\tau+1)p(\mu-1) + (2a+1)\,\{\,(\tau+1)\nu+\tau\}\,] +\\ &\quad +\lambda[2p-2(\nu+1)\,(a+1) + \theta(a-h'+1)\,],\\ &\cdots\cdots\cdots\\ \varphi^{\theta'''} &= (\lambda+1)\,[\,(\tau+1)p(\mu-\theta+1) + (a\theta+\theta-1)\,\{\,(\tau+1)\nu+\tau\}\,].\end{aligned}$$

Recherchons la plus petite valeur de θ pour laquelle on a $\varphi_1''' \geqslant \varphi^{\theta'''}$. On doit avoir, après division des deux membres de l'inégalité par $\theta-1 \geqslant 1$,

$$\lambda[h'-(\tau-1)\,(a-h'+1)\,] \geqslant \tau(a-h'+1)-h'.$$

Voyons tout d'abord quand a lieu l'égalité. Ecrivons l'expression sous la forme

$$h'(\lambda+1) = (a-h'+1)\,[\tau(\lambda+1)-\lambda]$$

et tenons compte du fait que, p étant premier, $a+1$ et h' sont premiers entre eux. Nous trouvons

$$\lambda+1 = a-h'+1, \qquad \tau(\lambda+1)-\lambda = h'$$

d'où

$$a = \tau(a-h'+1), \qquad \lambda = a-h'.$$

Dans ces conditions, le point O_{132} est multiple d'ordre

$\theta-1$ pour les courbes C′ et celles-ci ont en commun $a-h'$ points fixes infiniment voisins successifs de O_{132}, multiples d'ordre $\theta-1$.

Tous les termes de l'équation des courbes C′ peuvent être divisés par la puissance $(\theta-1)(a-h')$ de x_2. Dans l'équation des courbes C′ sous sa dernière forme, on a alors

$$\begin{aligned}\alpha_1 &= (a-h'+1)[(\tau+1)p(\mu-k+1)+i\{(\tau+1)\nu+\tau\}]+\\ &\quad +(a-h')[kp-(\nu+1)(i+1)+\theta(a-h'+1)],\\ \alpha_2 &= (a-\tau+1)[kp-(\nu+1)(i+1)]+(a-h')(i-\tau+1)+\\ &\quad +a+\theta-\tau,\\ \alpha_3 &= \tau[kp-(\nu+1)(i+1)+a-h'+1]+i-a.\end{aligned}$$

On a d'autre part

$$\varphi_1'''=\varphi_2'''=\ldots\varphi_\theta'''$$

et dans les termes correspondants, α_2 prend les valeurs $\theta-1$, $\theta-2$, ..., 0 et α_3 les valeurs 0, 1, ..., $\theta-1$. Le dernier point de la suite considérée est donc multiple d'ordre $\theta-1$ et uni parfait pour l'involution I_p.

14. Lorsqu'il n'est pas possible de trouver une valeur de λ donnant l'égalité, nous définirons un entier τ_1 par la double inégalité

$$\begin{aligned}(\tau_1-1)[h'-(\tau-1)(a-h'+1)]<\tau(a-h'+1)<\\ <\tau_1[h'-(\tau-1)(a-h'+1)]\end{aligned}$$

et nous prendrons $\lambda=\tau_1$.

En raisonnant comme précédemment, on voit que les courbes C′ ont τ_1 points fixes infiniment voisins successifs de O_{132} en commun; les τ_1-1 premiers de ces points sont multiples d'ordre

$$(\theta-1)[(a+1)-\tau(a-h'+1)],$$

le dernier, que nous désignerons par O_{1323}, est multiple d'ordre

$$(\theta-1)[a-h'+1)(\tau\tau_1-\tau_1+1)-\tau_1 h']$$

pour ces courbes. Au point O_{1323}, toutes les tangentes aux courbes C′ sont confondues avec $x_2=0$.

On poursuivra l'analyse de la structure du point uni O_1 en opérant maintenant, sur les courbes C', λ fois la transformation T_2, et ainsi de suite. Nous allons montrer que l'on parviendra finalement à un point multiple d'ordre $\theta-1$, uni parfait pour l'involution I_p.

Posons

$$\rho = a - h' + 1, \qquad \rho_1 = h' - (\tau - 1)\rho, \qquad h_1' = \tau\rho - h'.$$

Le nombre τ_1 satisfait à la double inégalité

$$(\tau_1 - 1)\rho_1 < h_1' < \tau_1\rho_1.$$

Posons ensuite

$$\rho_2 = h_1' - (\tau_1 - 1)\rho_1, \qquad h_2' = \tau_1\rho_1 - h_1',$$

puis définissons un entier τ_2 par la condition

$$(\tau_2 - 1)\rho_2 < h_2' \leqslant \tau_2\rho_2,$$

et ainsi de suite. Nous aurons trois suites de nombres entiers ρ_j, h_j', τ_j définis par

$$\rho_j = h'_{j-1} - (\tau_{j-1} - 1)\rho_{j-1}, \quad h_j' = \tau_{j-1}\rho_{j-1} - h'_{j-1},$$
$$(\tau_j - 1)\rho_j < h_j' \leqslant \tau_j\rho_j.$$

De l'analyse précédente, on conclut que, en correspondance à chaque valeur de j, les courbes C' ont en commun τ_j points infiniment voisins successifs, les $\tau_j - 1$ premiers étant multiples d'ordre $(\theta - 1)\rho_j$, le dernier multiple d'ordre $(\theta - 1)\rho_{j+1}$.

La suite des nombres ρ, ρ_1, ρ_2, ... est non croissante. Soit m la plus petite valeur pour laquelle on a $\rho_m = \rho_{m+1}$, c'est-à-dire $h'_m = \rho_m\tau_m$.

Cela signifie que les couples de nombres ρ_1 et h_1', ρ_2 et h_2', ..., ρ_{m-1} et h_{jm-1} étant premiers entre eux, en exprimant h'_m et ρ_m en fonction de h'_{m-1}, ρ_{m-1}, on a

$$\rho_{m-1}[\tau_{m-1}(\tau_m + 1) - \tau_m] = h'_{m-1}(\tau_m + 1),$$

d'où, nécessairement,

$$\rho_{m-1} = \tau_m + 1, \quad h'_{m-1} = \tau_{m-1}(\tau_m + 1) - \tau_m,$$

et $\rho_m = 1$.

On voit donc que la suite de points fixes communs aux courbes C′ envisagée, se termine par des points multiples d'ordre $\theta-1$.

Pour le dernier de ces points, le coefficient de la plus haute puissance de x_1 dans l'équation des courbes C′ (toutes transformations effectuées) est

$$\lambda_{1a}\, x_2^{\theta-1} + \lambda_{2,2a+1}\, x_2^{\theta-2} x_3 + \ldots + \lambda_{\theta,\, a\theta+\theta-1}\, x_3^{\theta-1};$$

c'est donc un point uni parfait pour l'involution I_p.

Au domaine de ce point correspond, sur la surface Φ', la courbe rationnelle normale d'ordre $\theta-1$, d'équations

$$\left\| \begin{matrix} X_{1a} & X_{2,2a+1} \ldots X_{\theta-1,\, a(\theta-1)+\theta-2} \\ X_{2,2a+1} & X_{3,3a+2} \ldots X_{\theta,\, \theta+\theta-1} \end{matrix} \right\| = 0,$$

toutes les autres coordonnées X_{ki} étant nulles.

Nous désignerons cette courbe par $\gamma_{\theta-1}$. Remarquons qu'elle rencontre la courbe γ_a au seul point A_{1a}.

15. En résumé, les courbes C′ ont en commun une suite de points infiniment voisins successifs de O_1, le premier de ces points étant sur la droite $x_3=0$.

Les $\mu-1$ premiers de ces points sont multiples d'ordre $\theta(a+1)-1$. Le suivant est multiple d'ordre $(\theta-1)(a-h'+1)+a$. À partir de ce point, la suite bifurque : on a en premier lieu une suite de $\alpha-\mu-1$ points multiples d'ordre a dont le dernier est uni parfait pour l'involution I_p et donne naissance, sur la surface Φ', à la courbe γ_a. On a en second lieu une suite de points dont les multiplicités contiennent en facteur $\theta-1$. Cette suite comprend $\tau-1$ points multiples d'ordre $\rho(\theta-1)$, suivis de τ_1 points multiples d'ordre $\rho_1(\theta-1)$, et ainsi de suite. La suite se termine par τ_m+1 points multiples d'ordre $\theta-1$, où $m \geqslant 1$. Le dernier point de la suite est uni parfait pour l'involution I_p et donne naissance, sur la surface Φ', à la courbe $\gamma_{\theta-1}$.

Les courbes γ_a, d'ordre a, et $\gamma_{\theta-1}$, d'ordre $\theta-1$, sont rationnelles et normales; elles ont en commun un seul point.

Observons que les raisonnements faits sur les courbes C′ subsistent lorsque l'on suppose $\theta = 1$. Dans ce cas, que nous avons d'ailleurs étudié en détail dans un travail antérieur, la courbe $\gamma_{\theta-1}$ disparaît. Les courbes C′ ont en commun α points infiniment voisins successifs, multiples d'ordre a, dont le dernier est uni parfait pour l'involution I_p et donne naissance à la courbe γ_a.

De plus, lorsque $\theta = 1$, α n'est plus nécessairement supérieur à $a + h + 1$.

III

16. Nous étudierons maintenant la structure du point uni O_1 de I_p dans les hypothèses suivantes :

1° Il existe un entier θ, *supérieur à l'unité*, tel que

$$h < \theta(\alpha - h) < \alpha.$$

2° On a

$$a + h < \theta(\alpha - a - h - 1).$$

On a par suite

$$\alpha > a + h + 1.$$

D'après ce que nous avons vu (n° 7), la condition pour que le terme contenant x_1 à la plus haute puissance dans l'équation des courbes C′ ($\lambda_{00} = 0$) ne soit pas celui qui est donné par $k = \theta$, $i = a_\theta$, est que l'on ait un nombre

$$a_{t\theta + j} = (t\theta + j)\, a + t\,(\theta - 1) + j$$

pour $t > 1$, $j > 0$.

Supposons que l'on ait un nombre de cette nature pour $j = \theta - 1$, c'est-à-dire

$$a_{(t+1)\theta - 1} = [(t + 1)\,\theta - 1]\, a + (t + 1)\,(\theta - 1)\,.$$

Alors, d'après ce que nous avons vu, on a également

$$a_{(t+2)\theta - 1} = [(t + 2)\,\theta - 1]\, a + (t + 2)\,(\theta - 1)\,.$$

On a

$$\varphi_{(t+1)\theta-1} = [a + (t+1)(\theta-1)](\alpha-1) - \\ - [(t+1)\theta - 2](a+h),$$

$$\varphi_{(t+2)\theta-1} = [a + (t+2)(\theta-1)](\alpha-1) - \\ - [(t+2)\theta - 2](a+h)$$

et

$$\varphi_{(t+1)\theta-1} - \varphi_{(t+2)\theta-1} = a + h - (\theta-1)(\alpha - a - h - 1) > 0 .$$

Il en résulte que nous obtiendrons le cas général en supposant qu'il existe un nombre η tel que l'on ait

$$\eta < \theta,\ a_{\eta\theta+\eta-1} = (\eta\theta + \eta - 1)\,a + \eta\theta - 1,$$
$$a_{(\eta+1)\theta+\eta} = [(\eta+1)\,\theta + \eta]\,a + (\eta+1)\,\theta - 2 .$$

Cela implique (n° 6)

$$\eta\theta(\alpha-h) < \alpha + (\eta-1)\,h, \qquad (\eta+1)\,\theta(\alpha-h) > \alpha + \eta h.$$

Réciproquement, ces dernières conditions entraînent les précédentes.

Dans ces hypothèses, le terme contenant x_1 à la plus haute puissance dans l'équation des courbes C′ sera donné par $k = \eta\theta + \eta - 1$, $i = a_{\eta\theta+\eta-1}$.

Il en résulte que les courbes C′ auront, au point O_1, la multiplicité

$$a_{\eta\theta+\eta-1} + h_{\eta\theta+\eta-1} = (\eta\theta + \eta - 1)(a+h) - (\eta\theta - 1)(\alpha - 1) .$$

En ce point, elles auront

$$h_{\eta\theta+\eta-1} = (\eta\theta + \eta - 1)\,h - (\eta\theta - 1)\,\alpha$$

tangentes confondues avec $x_2 = 0$ et

$$a_{\eta\theta+\eta-1} = (\eta\theta + \eta - 1)\,a + \eta\theta - 1$$

tangentes confondues avec $x_3 = 0$.

On aura d'ailleurs

$$\varphi_{2\theta} < \varphi_{2\theta+1},\ \varphi_{2\theta+1} > \varphi_{2\theta+2},$$
$$\varphi_{3\theta} < \varphi_{3\theta+1} < \varphi_{3\theta+2},\ \varphi_{3\theta+2} > \varphi_{3\theta+3},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\varphi_{\eta\theta} < \varphi_{\eta\theta+1} < \cdots < \varphi_{\eta\theta+\eta-1},\ \varphi_{\eta\theta+\eta-1} > \varphi_{\eta\theta+\eta} .$$

17. Effectuons sur les courbes C′ λ fois la transformation T_1 et appelons φ_k' l'exposant de x_1 dans le terme donné par $i = a_k$.

Posons, pour abréger,

$$\varphi = \alpha - a - h - 1.$$

Nous avons

$$\varphi_\theta = a(\alpha - 1) + (\theta - 1)\varphi, \qquad h_\theta = ah - (\theta - 1)\alpha,$$

$$\varphi_{2\theta+1} = (a - 1)(\alpha - 1) + 2\theta\varphi, \qquad h_{2\theta+1} = (2\theta + 1)h - (2\theta - 1)\alpha,$$

$$\varphi_{3\theta+2} = (a - 2)(\alpha - 1) + (3\theta + 1)\varphi, \qquad h_{3\theta+2} = (3\theta + 2)h - (3\theta - 1)\alpha,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\varphi_{t\theta+t-1} = (a - t + 1)(\alpha - 1) + (t\theta + t - 2)\varphi, \qquad h_{t\theta+t-1} = (t\theta + t - 1)h - (t\theta - 1)\alpha$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\varphi_{\eta\theta+\eta-1} = (a - \eta + 1)(\alpha - 1) + (\eta\theta + \eta - 2)\varphi, \qquad h_{\eta\theta+\eta-1} = (\eta\theta + \eta - 1)h - (\eta\theta - 1)\alpha.$$

Par conséquent

$$\varphi_\theta - \varphi_{2\theta+1} = \varphi_{2\theta+1} - \varphi_{3\theta+2} = \ldots = \\ = \varphi_{(\eta-1)\theta+\eta-2} - \varphi_{\eta\theta+\eta-1} = a + h - \theta\varphi < 0,$$

$$h_\theta - h_{2\theta+1} = h_{2\theta+1} - h_{3\theta+2} = \ldots = \\ = h_{(\eta-1)\theta+\eta-2} - h_{\theta\eta+\eta-1} = \theta(\alpha - h) - h > 0.$$

D'autre part,

$$\varphi_k' = (\lambda + 1)\varphi_k + \lambda h_k,$$

donc

$$\varphi'_\theta - \varphi'_{2\theta+1} = \varphi'_{2\theta+1} - \varphi'_{3\theta+2} = \ldots = \varphi'_{(\eta-1)\theta+\eta-2} - \varphi'_{\eta\theta+\eta-1} = \\ = \lambda[\theta(a + 1) + a] + a + h - \theta\varphi.$$

Prenons pour λ un entier ξ satisfaisant à la double inégalité

$$(\xi - 1)[\theta(a+1) + a] < \theta\varphi - (a + h) < \xi[\theta(a+1) + a].$$

On observera que l'on a $\xi \leqslant \mu$ et nous supposerons en premier lieu $\xi < \mu$.

On a d'ailleurs, pour $t \leqslant \eta$, $j \leqslant t-1$,

$$\varphi'_{t\theta+j} - \varphi'_{t\theta+j-1} = \varphi - \xi\,(a+1) > 0.$$

On en conclut que dans l'équation de la courbe C' transformée, c'est le terme donné par $k=\theta$, $i=a_\theta$ qui contient x_1 à la plus haute puissance. Tous les termes de l'équation doivent contenir x_2 à la puissance

$$h_{\eta\theta+\eta-1} + \xi a_{\eta\theta+\eta-1} = \eta\,(\alpha-\xi) - \\ - (\eta\theta+\eta-1)\,[\alpha - h - \xi\,(a+1)]\,.$$

Après avoir divisé les deux membres de l'équation par ce facteur, le terme donné par $k=\theta$, $i=a_\theta$ contient x_2 à la puissance

$$(\eta-1)\,[\,(\theta+1)\,\{\alpha-h-\xi(a+1)\,\}-(\alpha-\xi)\,]$$

et x_3 à la puissance $\theta a+\theta-1$.

Par conséquent, au point O_1 sont infiniment voisins successifs $\xi-1$ points fixes, communs aux courbes C', multiples d'ordre

$$a_{\eta\theta+\eta-1} = (\eta\theta+\eta-1)\,a + \eta\theta - 1$$

suivis d'un point multiple d'ordre

$$(\eta-1)\,[\,(\theta+1)\,\{\alpha-h-\xi(a+1)\,\}-(\alpha-\xi)\,]+\theta a+\theta-1.$$

En ce point, il y a

$$(\eta-1)\,[\,(\theta+1)\,\{\alpha-h-\xi(a+1)\,\}-(\alpha-\xi)\,]$$

tangentes confondues avec $x_2=0$ et $\theta a+\theta-1$ confondues avec $x_3=0$.

Nous désignerons par O'_{13} ce dernier point.

18. Partons de l'équation de la courbe C' écrite sous sa sa dernière forme et effectuons λ fois la transformation T_2. Appelons φ_k'' l'exposant de x_1 dans le terme donné par $i=a_k$. Nous aurons

$$\varphi_k'' = (\lambda+1)\,\varphi_k' + \lambda a_k.$$

On en déduit

$$\begin{aligned}\varphi_\theta'' - \varphi''_{2\theta+1} = \varphi''_{2\theta+1} - \varphi''_{3\theta+2} = \dots = \\ = \varphi''_{(\eta-1)\theta+\eta-2} - \varphi''_{\eta\theta+\eta-1} = \lambda\,[(\xi-1)(\theta a + a + \theta) + \\ + a + h - \theta\varphi] + \xi(\theta a + a + \theta) + a + h - \theta\varphi\,.\end{aligned}$$

Le coefficient de λ est négatif d'après la définition de ξ. Nous prendrons pour λ le plus petit entier ξ_1 donnant

$$\varphi_\theta'' \leqslant \varphi''_{2\theta+1} \leqslant \dots \leqslant \varphi''_{\eta\theta+\eta-1}\,.$$

Nous supposerons qu'il n'existe aucune valeur de ξ_1 donnant l'égalité.

On a, pour $t \leqslant \eta$, $j \leqslant t-1$,

$$\varphi''_{t\theta+j} - \varphi''_{t\theta+j-1} = (\xi_1+1)\,[\varphi - \xi(a+1)] + \xi_1(a+1) > 0\,.$$

Dans l'équation transformée des courbes C$'$, c'est le terme donné par $k = \eta\theta + \eta - 1$, $i = a_{\eta\theta+\eta-1}$ qui contiendra x_1 à la plus haute puissance. Tous les termes de cette équation doivent être divisibles par x_3 exposant

$$\theta a + \theta - 1 + \xi_1(\eta-1)\,[(\theta+1)\{\alpha - h - \xi(a+1)\} - (\alpha-\xi)]\,.$$

L'équation étant débarrassée de ce facteur, le terme contenant x_1 à la plus haute puissance, contient x_3 à la puissance

$$(\eta-1)\,[\xi_1\{h - \theta(\alpha-h)\} + (\xi\xi_1+1)\{a + \theta(a+1)\}]\,,$$

et ne contient pas x_2.

Les courbes C$'$ ont donc en commun $\xi_1 - 1$ points fixes, infiniment voisins successifs de O'_{13}, multiples d'ordre

$$(\eta-1)\,[(\theta+1)\{\alpha - h - \xi(a+1)\} - (\alpha-\xi)]\,,$$

suivis d'un point de multiplicité

$$(\eta-1)\,[\xi_1\{h - \theta(\alpha-h)\} + (\xi\xi_1+1)\{a + \theta(a+1)\}]\,.$$

En ce point, toutes les tangentes sont confondues avec $x_3 = 0$.

Lorsque l'on a au contraire une valeur de ξ_1 donnant

$$\varphi_\theta'' = \varphi''_{2\theta+1} = \dots = \varphi''_{\eta\theta+\eta-1}\,,$$

le dernier point est uni parfait pour l'involution I_p.

Observons que pour que p soit premier, $\theta(a+1)+a$ et $\theta\varphi-(a+h)$ doivent être premiers entre eux. Il en résulte que, dans la dernière hypothèse, on aura

$$\xi_1+1=\theta(a+1)+a, \qquad \xi(\xi_1+1)-\xi_1=\theta\varphi-(a+h).$$

On en déduit

$$\xi_1[h-\theta(\alpha-h)]+(\xi\xi_1+1)[a+\theta(a+1)]=1,$$
$$(\theta+1)[\alpha-h-\xi(a+1)]-(\alpha-\xi)=1.$$

Les ξ_1 points infiniment voisins successifs de O'_{13} sont donc multiples d'ordre $\eta-1$, le dernier étant à tangentes variables.

19. Posons

$$\psi=\theta(a+1)+a, \qquad \chi=\theta\varphi-(a+h).$$

Le nombre ξ est défini par la double inégalité

$$(\xi-1)\psi<\chi<\xi\psi.$$

Posons ensuite

$$\psi_1=\chi-(\xi-1)\psi, \qquad \chi_1=\xi\psi-\chi;$$

le nombre ξ_1 est défini par

$$(\xi_1-1)\psi_1<\chi_1\leqslant\xi_1\psi_1.$$

Au point O'_{13} font suite ξ_1 points fixes, les ξ_1-1 premiers multiples d'ordre

$$(\eta-1)[\chi-(\xi-1)\psi]=(\eta-1)\psi_1$$

et le dernier multiple d'ordre

$$(\eta-1)[(\xi\xi_1-\xi_1+1)\psi-\xi_1\chi]=(\eta-1)[\chi_1-(\xi_1-1)\psi_1]$$

pour les courbes C'.

Supposons que nous n'ayons pas, comme dernier point, un point uni parfait de I_p et posons

$$\psi_2=\chi_1-(\xi_1-1)\psi_1, \qquad \chi_2=\xi_1\psi_1-\chi_1.$$

Définissons ξ_2 par les conditions

$$(\xi_2-1)\psi_2<\chi_2\leqslant\xi_2\psi_2.$$

Au dernier point commun aux courbes C′, multiple d'ordre

$$(\eta-1)[\chi_1-(\xi_1-1)\psi_1]=(\eta-1)\psi_2$$

pour ces courbes, font suite ξ_2-1 points multiples d'ordre $(\eta-1)\psi_2$ suivis d'un point multiple d'ordre $\chi_2-(\xi_2-1)\psi_2$ pour les mêmes courbes.

Si l'on n'a pas $\chi_2=\xi_2\psi_2$, c'est-à-dire si le dernier point n'est pas uni parfait pour I_p, on continuera de la même manière. On parviendra ainsi à une suite non croissante de nombres ψ, ψ_1, ψ_2, ... Pour une certaine valeur m, on aura $\psi_m=\psi_{m+1}$, c'est-à-dire $\chi_m=\xi_m\psi_m$, ou encore

$$(\xi_m\xi_{m-1}+\xi_{m-1}-\xi_m)\psi_{m-1}=(\xi_m+1)\chi_{m-1}.$$

Les couples de nombres ψ et χ, ψ_1 et χ_1, ..., ψ_{m-1} et χ_{m-1} étant premiers entre eux, on a

$$\xi_m+1=\psi_{m-1}, \quad \xi_m\xi_{m-1}+\xi_{m-1}-\xi_m=\chi_{m-1}.$$

Par suite, $\psi_m=\psi_{m+1}=1$.

Au point O'_{13} font donc suite ξ_1-1 points multiples d'ordre $(\eta-1)\psi_1$, suivis de ξ_2 points multiples d'ordre $(\eta-1)\psi_2$, ..., suivis de ξ_{m-1} points multiples d'ordre $(\eta-1)\psi_{m-1}$, suivis enfin de ξ_m+1 points multiples d'ordre $\eta-1$ pour les courbes C′. Le dernier des points de cette suite est uni parfait pour les courbes C′. Il lui correspond, sur la surface Φ', une courbe rationnelle normale d'ordre $\eta-1$, d'équation

$$\left\|\begin{matrix} X_{\theta,\,\theta a+\theta-1} & \dots & X_{(\eta-1)\theta+\eta-2,\,(\eta\theta-\theta+\eta-2)a+\eta\theta+\theta-1} \\ X_{2\theta+1,\,(2\theta+1)a+2\theta-1} & \dots & X_{\eta\theta+\eta-1,\,(\eta\theta+\eta-1)a+\eta\theta-1} \end{matrix}\right\|=0,$$

toutes les autres coordonnées X_{ki} étant nulles.

Nous désignerons cette courbe par $\gamma_{\eta-1}$.

20. Effectuons maintenant sur les courbes C′ d'équation (1), μ fois la transformation T_1; nous retrouvons l'équation (2) du n° 9. Appelons encore φ_k' l'exposant de x_1 dans le terme donné par $i=a_k$.

Nous avons actuellement

$$\varphi_\theta' - \varphi'_{2\theta+1} = \varphi'_{2\theta+1} - \varphi'_{3\theta+2} = \ldots = \varphi'_{(\eta-1)\theta+\eta-2} - \varphi'_{\eta\theta+\eta-1} =$$
$$= \mu\,[\theta\,(a+1)+a] + a + h - \theta\varphi > 0\,,$$

et

$$\varphi_1' - \varphi_\theta' = (\theta-1)\,[\mu\,(a+1)-\varphi] > 0\,,$$

C'est donc le terme donné par $k=1$, $i=a$ qui contient x_1 à la plus haute puissance.

Tous les termes de l'équation (2) sont divisibles par x_2 exposant

$$\alpha-1+\theta\varphi+(\mu-1)\,(\theta a+\theta-1) = \nu+1-\theta(a+1-h')\,.$$

Cette simplification effectuée, nous retrouvons l'équation des courbes C′ déjà rencontrée plus haut (n° 9),

$$\lambda_{1a}\, x_1^{\mu p+a\nu}\, x_2^{(\theta-1)\,(a-h'+1)}\, x_3^{a} + \ldots = 0.$$

On conclut d'abord de ce qui précède qu'au point O'_{13} sont infiniment voisins successifs $\mu-\xi$ points (dans la direction $x_3=0$) dont les $\mu-\xi-1$ premiers sont multiples d'ordre $\theta a+\theta-1$ pour les courbes C′, le dernier, que nous désignerons encore par O_{13}, étant multiple d'ordre $(\theta-1)\,(a-h'+1)+a$.

Après la transformation T_1^{μ}, le point O_{13} a pour coordonnées (1, 0, 0) et en ce point, les courbes C′ ont a tangentes confondues avec $x_3=0$, les autres étant confondues avec la droite $x_2=0$. L'analyse de la singularité des courbes C′ au point O_{13} est exactement la même que dans les hypothèses considérées au n° 9; nous ne la reprendrons pas et nous bornerons à rappeler le résultat. Au point O_{13} sont infiniment voisins successifs dans une direction $\alpha-\mu-1$ points multiples d'ordre a dont le dernier est uni parfait pour l'involution I_p et, dans une autre direction, $\tau-1$ points multiples d'ordre $\rho(\theta-1)$, suivis de τ_1 points multiples d'ordre $\rho_1(\theta-1)$, ..., suivis de τ_m+1 points multiples d'ordre $\theta-1$ dont le dernier est uni parfait pour l'involution I_p.

Sur la surface Φ', nous avons, dans le cas actuel, trois courbes rationnelles normales φ_a, $\varphi_{\theta-1}$, $\varphi_{\eta-1}$. La troisième rencontre la seconde au seul point $A_{\theta,\theta a+\theta-1}$, mais ne rencontre pas la première. On sait d'ailleurs que les deux premières courbes se rencontrent au seul point A_{1a}.

Dans ce qui précède, nous avons supposé $\xi < \mu$ (n° 17) et il nous reste à envisager l'hypothèse $\xi = \mu$. Mais dans ce cas, on passe directement du point O_1 au point O_{13} par une suite de $\mu - 1$ points multiples d'ordre $(\eta\theta + \eta - 1)a + \eta\theta - 1$ pour les courbes C' et on a alors à envisager la singularité des courbes C' au point O_{13} comme dans les cas précédents. Quant à la surface Φ', elle possède deux courbes rationnelles γ_a, $\gamma_{\theta-1}$ comme dans le cas étudié au § II.

IV

21. Le courbes C' ont en O_1 un certain nombre de tangentes confondues avec la droite $x_2 = 0$. Pour rechercher les points fixes, infiniment voisins de O_1 dans la direction $x_2 = 0$, communs aux courbes C', nous effectuerons λ fois la transformation T_2 et, dans l'équation obtenue, nous désignerons par φ_k' l'exposant de x_1 dans le terme donné par $i = a_k$. Bien que cette notation ait déjà été employée dans ce qui précède et avec une autre signification, aucune confusion n'est possible.

Nous aurons

$$\varphi_k' = (\lambda + 1)\varphi_k + \lambda a_k.$$

Commençons par faire quelques remarques.

a) Considérons une valeur de k et les termes correspondants aux valeurs $i = a_k$, $i < a_k$; nous avons, en appelant $\overline{\varphi}_k'$ l'exposant de x_1 dans le terme qui correspond à cette valeur de i,

$$\varphi_k' - \overline{\varphi}_k' = (a_k - i)\left[(\lambda + 1)(\alpha - 1) + \lambda\right],$$

quantité toujours positive, quel que soit λ.

b) Considérons une valeur de t et un nombre χ tel que

$$(t-\chi-1)\alpha+(\chi+1)h<t\theta(\alpha-h)<(t-\chi)\alpha+\chi h.$$

Nous avons alors

$$\varphi_{t\theta}<\varphi_{t\theta+1}<\dots<\varphi_{t\theta+\chi},\ \varphi_{t\theta+\chi}>\varphi_{t\theta+\chi+1},$$
$$\varphi_{t\theta-\chi+1}<\varphi_{t\theta+\chi+2}<\dots<\varphi_{(t+1)\theta}.$$

On a

$$\varphi'_{t\theta+\chi}-\varphi'_{t\theta+\chi-1}=\dots=\varphi'_{t\theta+1}-\varphi'_{t\theta}=(\lambda+1)\,\varphi+\lambda(a+1)\,,$$
$$\varphi'_{t\theta+\chi}-\varphi'_{t\theta+\chi+1}=(\lambda+1)\,(a+h)-\lambda a\,,$$
$$\varphi'_{(t+1)\theta}-\varphi'_{t\theta+\theta-1}=\dots=\varphi'_{t\theta+\chi+2}-\varphi'_{t\theta+\chi+1}=$$
$$=(\lambda+1)\,\varphi+\lambda\,(a+1)\,.$$

Par conséquent, quel que soit λ, on a toujours

$$\varphi'_{t\theta}<\varphi'_{t\theta+1}<\dots<\varphi'_{t\theta+\chi},\ \varphi'_{t\theta+\chi}>\varphi'_{t\theta+\chi+1},$$
$$\varphi'_{t\theta+\chi+1}<\varphi'_{t\theta+\chi+2}<\dots<\varphi'_{(t+1)\theta}.$$

c) Le nombre χ conservant la même signification, on a

$$\varphi'_{t\theta+\chi}-\varphi'_{(t-1)\theta+\chi-1}=\lambda\,[\theta\,(\alpha-h)-h]+\theta\varphi-(a+h)\,.$$

Le signe du second nombre dépend du signe de $\theta\varphi-$ $-(a+h)$.

On a en outre

$$\varphi'_{(t-1)\theta+\chi-1}-\varphi'_{t\theta+\chi-1}=\lambda\,[h-(\theta-1)\,(\alpha-h)]+$$
$$+a+h-(\theta-1)\,\varphi\,,$$

quantité toujours positive quel que soit λ.

22. Cela étant, nous allons en premier lieu examiner le cas où, θ étant supérieur à l'unité et défini par

$$h<\theta(\alpha-h)<\alpha,$$

on a

$$a+h>\theta\varphi.$$

D'après les observations précédentes, le cas général sera obtenu en supposant qu'il existe un nombre η inférieur à θ tel que l'on ait

$$a_{\eta\theta+\eta-1} = (\eta\theta + \eta - 1)\, a + \eta\theta - 1,\ a_{(\eta+1)\theta+\eta} =$$
$$= [(\eta + 1)\, \theta + \eta]a + (\eta + 1)\, \theta - 2\,,$$

ou les conditions équivalentes

$$\eta\theta(\alpha - h) < \alpha + (\eta - 1)\,h, \qquad (\eta + 1)\,\theta(\alpha - h) > \alpha + \eta h.$$

Le terme de l'équation (1) de C′ contenant x_1 à la plus haute puissance, est donné par $k = \theta$, $i = \theta a + \theta - 1$.

Prenons pour λ le nombre satisfaisant à la condition

$$(\lambda - 1)\,[\theta(\alpha - h) - h] < a + h - \theta\varphi \leqslant \lambda[\theta(\alpha - h) - h].$$

Supposons en premier lieu qu'il existe un entier λ satisfaisant à l'égalité. Celle-ci peut s'écrire sous la forme

$$(\lambda + 1)\,(\theta + 1)p = [\,(\theta + 1)\,a + \theta]\,[\,(\lambda + 1)\alpha - 1].$$

$\lambda + 1$ ne peut diviser $(\lambda + 1)\alpha - 1$ et $\theta + 1$ ne peut diviser $(\theta + 1)\,a + \theta$, donc on a soit

$$(\lambda + 1)p = (\theta + 1)\,a + \theta, \qquad \theta + 1 = (\lambda + 1)\alpha - 1,$$

soit

$$\lambda + 1 = (\theta + 1)\,a + \theta, \qquad (\theta + 1)p = (\lambda + 1)\alpha - 1.$$

La première hypothèse est en contradiction avec $\theta < \alpha$. La seconde donne

$$\theta(\alpha - h) = h + 1.$$

Actuellement, on a

$$\varphi_\theta' = \varphi'_{2\theta+1} - \varphi'_{3\theta+2} = \ldots = \varphi'_{\eta\theta+\eta-1} = \lambda p = \varphi_a'\ .$$

Pour $k = \alpha$, on a en effet $i = p$.

Il en résulte que dans ce cas, les courbes C′ ont en O_1 la multiplicité $a + h - (\theta - 1)\varphi$, $\theta h - (\theta - 1)\alpha$ de leurs tangentes étant confondues avec $x_2 = 0$; elles ont en outre en commun $(\theta + 1)\,a + \theta - 1$ points fixes infiniment voisins successifs de O_1, le premier étant sur $x_2 = 0$. Ces points sont multiples d'ordre $\theta h - (\theta - 1)\alpha$ et le dernier est uni parfait pour l'involution I_p.

Au domaine de ce dernier point correspond sur la surface Φ' la courbe rationnelle normale d'équations

$$\begin{Vmatrix} X_{\theta,\,\theta a+\theta-1} & \dots X_{\eta\theta+\eta-1,\,(\eta\theta+\eta-1)a+\eta\theta-1} \\ X_{2\theta+1,\,(2\theta+1)a+2\theta-1} & \dots X_{\alpha p} \end{Vmatrix} = 0\,.$$

Cette courbe est d'ordre η et d'autre part, elle doit être d'ordre

$$\theta h-(\theta-1)\alpha=\alpha-\theta(\alpha-h)=\alpha-h-1.$$

On a donc nécessairement

$$\eta=\alpha-h-1.$$

Nous désignerons la courbe obtenue sur Φ' par $\gamma_{\alpha-h-1}$.

Dans l'équation de C' après la transformation, on peut mettre en évidence x_3 à la puissance $a\theta+\theta-1+\lambda(\alpha-h-1)$.

23. Supposons maintenant qu'il ne soit pas possible de trouver un entier λ satisfaisant à l'égalité et soit ω l'entier satisfaisant à

$$(\omega-1)\left[\theta(\alpha-h)-h\right]<a+h-\theta\varphi<\omega\left[\theta(\alpha-h)-h\right].$$

Dans l'équation des courbes C' obtenue après avoir effectué la transformation T_2^{ω}, le terme contenant x_1 à la plus haute puissance est donné par $k=\eta\theta+\eta-1$ et $i=a_{\eta\theta+\eta-1}$. Cette puissance a pour valeur

$$\begin{aligned}\varphi'_{\eta\theta+\eta-1}=&(\omega+1)\left[(a+\eta\theta-1)(\alpha-1)-\right.\\ &\left.-(\eta\theta+\eta-2)(a+h)\right]+\omega\left[(\eta\theta+\eta-1)a+\eta\theta-1\right].\end{aligned}$$

Tous les termes de l'équation sont divisibles par x_3 exposant

$$\theta(a+1)-1+\omega\left[\alpha-\theta(\alpha-h)\right].$$

Dans le terme contenant x_1 à la puissance la plus élevée, x_2 a la puissance

$$(\eta\theta+\eta-1)h-(\eta\theta-1)\alpha$$

et, après suppression du facteur commun, x_3 la puissance

$$(\eta-1)\left[\theta(a+1)+a-\omega\{\theta(\alpha-h)-h\}\right].$$

Les courbes C' ont en commun ω points fixes infiniment voisins successifs de O_1, le premier étant sur $x_2=0$. Les $\omega-1$ premiers sont multiples d'ordre $\theta a+\theta-1$ et le dernier, que nous désignerons par O_{12}, est multiple d'ordre

$$\eta h-(\eta\theta-1)(\alpha-h)+(\eta-1)[\theta(a+1)+\theta-\omega\{\theta(\alpha-h)-h\}].$$

Opérons sur les courbes C' ainsi obtenues la transformation T_2 ou, ce qui revient au même, opérons λ fois la transformation T_2 sur l'équation (1) des courbes C', en prenant $\lambda>\omega$. Il est facile de voir que, parmi les termes de l'équation donnés par $k=1, 2, \ldots, \alpha-1$, c'est celui qui correspond à $k=\eta\theta+\eta-1$, $i=a_{\eta\theta+\eta-1}$ qui contient x_1 à la plus haute puissance. Tous les termes de l'équation obtenue sont divisibles par x_3 exposant

$$\theta(a+1)-1+\lambda[\alpha-\theta(\alpha-h)].$$

Le terme donné par $k=\alpha$, $i=p$ étant $x_1{}^{\lambda p}\, x_3{}^{p}$, on doit donc avoir

$$\theta(a+1)-1+\lambda[\alpha-\theta(\alpha-h)]\leqslant p.$$

Si l'on tient compte des résultat obtenus dans l'analyse des points infiniment voisins successifs appartenant aux courbes C' dans la direction $x_3=0$, on voit que pour une valeur de λ satisfaisant à l'inégalité précédente, on devra avoir, dans l'équation obtenue pour les courbes C',

$$\varphi'_{\eta\theta+\eta-1}(\lambda)=\lambda p\,.$$

De plus, le coefficient de $x_1{}^{\lambda p}$ dans cette équation doit être

$$a_{\eta\theta+\eta-1,\,(\eta\theta+\eta-1)a+\eta\theta-1}\, x_2+a_{\alpha,\,p}\, x_3\,.$$

Par conséquent, on aura

$$h_{\eta\theta+\eta-1}=\eta h-(\eta\theta-1)(\alpha-h)=1\,,$$
$$\theta\,(a+1)+\lambda\,[\alpha-\theta\,(\alpha-h)]=p\,.$$

Au point O_{12}, les courbes C' ont donc une seule tangente confondue avec $x_2=0$ et à ce point font suite $\lambda-\omega$ points simples infiniment voisins successifs dont le dernier est uni parfait pour l'involution I_p. Au domaine de ce point correspond, sur la surface Φ', la droite $A_{ki}A_{\alpha p}$, où

$$k=\eta\theta+\eta-1,\qquad i=(\eta\theta+\eta-1)a+\eta\theta-1.$$

Nous désignerons cette droite par γ_1.

24. Reprenons les courbes C′ obtenues après avoir opéré ω fois la transformation T_2. Au point O_{12}, ces courbes ont

$$(\eta-1)[\theta(a+1)+\theta-\omega\{\theta(\alpha-h)-h\}]$$

tangentes confondues avec $x_3=0$. Pour ces courbes, on a

$$\varphi_\theta' < \varphi'_{2\theta+1} < \dots < \varphi'_{\eta\theta+\eta-1}.$$

Opérons, sur ces courbes, λ fois la transformation T_1 et désignons par $\varphi''_{t\theta+t-1}$ l'exposant de x_1 dans le terme donné par $k=t\theta+t-1$, $i=a_{t\theta+t-1}$. Nous avons

$$\begin{aligned}\varphi''_{\eta\theta+\eta-1} - \varphi''_{(\eta-1)\theta+\eta-2} = \dots = \varphi''_{2\theta+1} - \varphi_\theta'' = \\ = \lambda[(\omega-1)\}\theta(a-h)-h\{+\theta\varphi-(a+h)]+ \\ +\omega\}\theta(\alpha-h)-h\{+\theta\varphi-(a+h).\end{aligned}$$

Soit ω_1 la plus petite valeur de λ rendant cette expression négative. Au point O_{12} font suite, dans la direction $x_3=0$, ω_1 points infiniment voisins successifs. Les ω_1-1 premiers de ces points ont la multiplicité

$$(\eta-1)[\theta(a+1)+\theta-\omega\{\theta(\alpha-h)-h\}]$$

pour les courbes C′, le dernier ayant la multiplicité

$$(\eta-1)[(\omega\omega_1+1)\{\theta(\alpha-h)-h\}-\omega_1(\theta a+\theta+a)].$$

En ce point, toutes les tangentes sont confondues avec $x_2=0$.

On poursuivra l'analyse de ce point comme cela a été fait plus haut à deux reprises dans des cas analogues et on trouvera finalement un dernier point fixe, uni parfait pour l'involution I_p, multiple d'ordre $\eta-1$ pour les courbes C′.

Au domaine de ce point correspond, sur la surface Φ', une courbe rationnelle normale d'ordre $\eta-1$, d'équations

$$\left\| \begin{matrix} X_{\theta,\,\theta a+\theta-1} & \dots X_{(\eta-1)\theta+\eta-2,\,(\eta\theta-\theta+\eta-2)a+\eta\theta-\theta-1} \\ X_{2\theta+1,\,(2\theta+1)a+2\theta-1} & \dots X_{\eta\theta+\eta-1,\,(\eta\theta+\eta-1)a+\eta\theta-1} \end{matrix} \right\| = 0,$$

toutes les autres coordonnées X_{ki} étant nulles.

Nous désignerons cette courbe par $\gamma'_{\eta-1}$. Elle rencontre la droite γ_1 en un point et la courbe $\gamma_{\theta-1}$ en un point.

25. Il nous reste à examiner le cas où l'on a

$$a+h<\theta\varphi,$$

les autres hypothèses concernant θ et η restant valables.

Dans ces conditions, le termes contenant x_1 à la plus haute puissance dans l'équation (1) des courbes C′ est donné par $k=\eta\theta+\eta-1$, $i=a_{\eta\theta+\eta-1}$.

Opérons encore λ fois la transformation T_2 sur les courbes C′. Quel que soit λ, c'est toujours le même terme qui contient x_1 à la plus haute puissance.

Observons que tous les termes de l'équation obtenue sont divisibles par x_3 exposant

$$a_{\eta\theta+\eta-1}+\lambda h_{\eta\theta+\eta-1}$$

et que l'on doit avoir, en tenant compte du transformé du terme $k=\alpha$, $i=p$,

$$a_{\eta\theta+\eta-1}+\lambda h_{\eta\theta+\eta-1}\leqslant p\,.$$

Pour la plus haute valeur de λ satisfaisant à cette inégalité, on aura nécessairement, comme plus haut (n° 23)

$$h_{\eta\theta+\eta-1}=1\,,\ \lambda+a_{\eta\theta+\eta-1}=p-1\,,$$
$$\varphi'_{\eta\theta+\eta-1}=\lambda p\,.$$

On en conclut que les courbes C′ ont une seule tangente confondue en O_1 avec la droite $x_2=0$. Elles ont en commun, dans cette direction, une suite de

$$p-(\eta\theta+\eta-1)a-\eta\theta$$

points simples infiniment voisins successifs dont le dernier est uni parfait pour l'involution I_p.

Au domaine de ce point correspond sur la surface Φ' la droite que nous avons désignée tantôt par γ'. Cette droite rencontre en un point la courbe $\gamma_{\eta-1}$ (n° 19).

Liége, le 16 septembre 1940.