Sur les points de diramation des surfaces multiples,

par LUCIEN GODEAUX, Membre de la Société.

(*Seconde note*) (1).

12. Reprenons la surface Φ' et les courbes $\gamma_1, \gamma_{21}, \gamma_{22}$ tracées sur cette surface et équivalentes au domaine du point A' sur la surface Φ. Comme nous l'avons vu, la courbe γ_1 et la courbe $\gamma_{21} + \gamma_{22}$ ont en commun un point A'_1 qui peut être simple ou double pour la surface Φ'. Nous pouvons donc supposer que ce point est équivalent à un ensemble de τ courbes rationnelles de degré -2, $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_\tau$, chacune de ces courbes rencontrant la précédente et la suivante en un point, mais ne rencontrant pas les autres; de plus, δ_1 rencontre la courbe $\gamma_{21} + \gamma_{22}$ en un point et δ_τ rencontre la courbe γ_1 en un point. Si A'_1 est simple pour la surface Φ', on posera $\tau = 0$.

Les courbes γ_{21} et γ_{22} ont en commun un point $\overline{A}'_1$ simple ou double pour la surface Φ'; nous supposerons que ce point est équivalent à σ courbes rationnelles $\delta'_1, \delta'_2, \ldots, \delta'_\sigma$, de degré -2, chacune de ces courbes rencontrant la précédente et la suivante en un point, mais ne rencontrant pas les autres, δ'_1 et δ'_σ rencontrant l'une γ_{21}, l'autre γ_{22} en un point. Si le point $\overline{A}'_1$ est simple pour la surface Φ', on posera $\sigma = 0$.

Deux cas peuvent se présenter suivant que la courbe γ_{21} rencontre δ'_1 ou δ'_σ. Plaçons-nous en premier lieu dans le premier cas. La courbe γ_{22} rencontre δ'_σ et δ_1 chacune en un point. Le point A' de Φ est équivalent à la courbe

$$\gamma_{21} + \delta'_1 + \delta'_2 + \cdots + \delta'_\sigma + \gamma_{22} + \delta_1 + \delta_2 + \cdots \delta_\tau + \gamma_1.$$

On a

$$\Gamma_1 \equiv \Gamma'_1 + \gamma_{21} + \delta'_1 + \delta'_2 + \cdots + \delta'_\sigma + \gamma_{22} + \delta_1 + \delta_2 + \cdots + \delta_\tau + \gamma_1.$$

Les courbes $\gamma_{21}, \gamma_{22}, \gamma_1$ ont respectivement les degrés $-(\nu_{21} + 1)$, $-(\nu_{22} + 2)$, $-(\nu_1 + 1)$.

13. Nous avons établi, dans nos travaux antérieurs, que le système $|p\,\Gamma_1|$ contient le système $|p\,\Gamma_p|$, la différence étant

(1) La première note est parue dans le *Bulletin de la Soc. roy. des Sc. de Liége*, 1940, pp. 54-66.

formée de composantes des points de diramation. En d'autres termes, nous avons une relation fonctionnelle de la forme

$$p\Gamma_1 \equiv p\Gamma_p + \lambda_{21}\gamma_{21} + \mu_1'\delta_1 + \cdots + \mu_\sigma'\delta_\sigma + \lambda_{22}\gamma_{22} + \mu_1\delta_1 + \cdots + \mu_\tau\delta_\tau + \lambda_1\gamma_1 + \Delta,$$

où λ_{21}, μ_1', ..., μ_σ', λ_{22}, μ_1, ..., μ_τ, λ_1 sont des entiers et Δ un terme provenant des points de diramation distincts de A'.

Les courbes Γ_p rencontrent la courbe γ_1 en un point, mais ne rencontrent pas les autres composantes du point A'. Cela va nous permettre de déterminer les entiers λ et μ.

Coupons successivement la courbe Γ_p par les composantes γ_{21}, δ_1', ..., γ_1 du point A'; cela donne

$$-(\nu_{21}+1)\lambda_{21} + \mu_1' = 0, \quad \lambda_{21} - 2\mu_1' + \mu_2' = 0, \cdots, \mu_{\sigma-2}' - 2\mu_{\sigma-1}' + \mu_\sigma' = 0.$$
$$\mu_{\sigma-1}' - 2\mu_\sigma' + \lambda_{22} = 0, \quad \mu_\sigma' - (\nu_{22}+2)\lambda_{22} + \mu_1 = 0, \quad \lambda_{22} - 2\mu_1 + \mu_2 = 0, \cdots,$$
$$\mu_{\tau-1} - 2\mu_\tau + \lambda_1 = 0, \quad \mu_\tau - (\nu_1+1)\lambda_1 + p = 0.$$

On déduit de ces relations

$$\mu_1' = (\nu_{21}+1)\lambda_{21}, \quad \mu_2' = (2\nu_{21}+1)\lambda_{21}, \cdots, \quad \mu_\sigma' = (\sigma_{21}+1)\lambda_{21},$$
$$\lambda_{22} = [(\sigma+1)\nu_{21}+1]\lambda_{21},$$
$$\mu_1 = [\sigma(\nu_{22}+1)\nu_{21} + \nu_{21}\nu_{22} + 2\nu_{21} + \nu_{22} + 1]\lambda_{21}, \cdots,$$
$$\mu_\tau = [\sigma(\tau\nu_{22}+1)\nu_{21} + \tau\nu_{21}\nu_{22} + (\tau+1)\nu_{21} + \tau\nu_{22} + 1]\lambda_{21},$$
$$\lambda_1 = [\sigma\{(\tau+1)\nu_{22}+1\}\nu_{21} + (\tau+1)\nu_{21}\nu_{22} + (\tau+2)\nu_{21} + (\tau+1)\nu_{22} + 1]\lambda_{21},$$

et enfin

$$p = [(\sigma+1)(\tau+1)\nu_1\nu_{21}\nu_{22} + (\sigma+\tau+2)\nu_1\nu_{21} + (\tau+1)\nu_1\nu_{22} + (\sigma+1)\nu_{21}\nu_{22} + \nu_1 + \nu_{21} + \nu_{22}]\lambda_{21}.$$

La quantité entre crochets du second membre ne peut être égale à l'unité, donc, p étant premier, on a $\lambda_{21} = 1$ et

$$p = (\sigma+1)(\tau+1)\nu_1\nu_{21}\nu_{22} + (\sigma+\tau+2)\nu_1\nu_{21} + (\tau+1)\nu_1\nu_{22} + (\sigma+1)\nu_{21}\nu_{22} + \nu_1 + \nu_{21} + \nu_{22}.$$

On obtient ainsi une nouvelle expression de p en fonction des ordres des courbes γ_1, γ_{21}, γ_{22}.

Dans l'hypothèse où c'est la courbe γ_{21} qui rencontre en un point chacune des courbes δ_σ', δ_1, on a de même

$$p = (\sigma+1)(\tau+1)\nu_1\nu_{21}\nu_{22} + (\tau+1)\nu_1\nu_{21} + (\sigma+\tau+2)\nu_1\nu_{22} + (\sigma+1)\nu_{21}\nu_{22} + \nu_1 + \nu_{21} + \nu_{22}.$$

14. Les courbes Γ_2 satisfont à une relation fonctionnelle analogue à la relation relative aux courbes Γ_p, mais les courbes Γ_2 rencontrent en un point la courbe γ_{21}. En procédant comme dans le cas des courbes τ_p, et en utilisant les mêmes notations, on arrive aux résultats suivants :

Si la courbe γ_{21} rencontre la courbe δ'_1, on a

$$\mu_\tau = (\nu_1 + 1)\lambda_1, \dots, \quad \mu_1 = (\tau\nu_1 + 1)\lambda_1, \quad \lambda_{22} = [(\tau + 1)\nu_1 + 1]\lambda_1,$$
$$\mu'_\sigma = [\tau\nu_1(\nu_{22} + 1) + \nu_1\nu_{22} + 2\nu_1 + \nu_{22} + 1]\lambda_1, \cdots,$$
$$\mu'_1 = [\tau\nu_1(\sigma\nu_{22} + 1) + \sigma\nu_1\nu_{22} + (\sigma + 1)\nu_1 + \sigma\nu_{22} + 1]\lambda_1,$$
$$\lambda_{21} = [\tau\nu_1\{(\sigma+1)\nu_{22} + 1\} + (\sigma+1)\nu_1\nu_{22} + (\sigma+2)\nu_1 + (\sigma+1)\nu_{22} + 1]\lambda_1$$

et la relation

$$p = (\nu_{21} + 1)\lambda_{21} - \mu'_1$$

entraîne $\lambda_1 = 1$ et donne la valeur de p trouvée plus haut.

Si la courbe γ_{21} rencontre les courbes δ'_σ et δ_1, le degré de cette courbe est égal à $-(\nu_{21} + 2)$ et celui de γ_{22} à $-(\nu_{22} + 1)$. On a

$$\mu'_1 = (\nu_{22} + 1)\lambda_{22}, \cdots, \quad \mu'_\sigma = (\sigma\nu_{22} + 1)\lambda_{22}, \quad \lambda_{21} = [(\sigma + 1)\nu_{22} + 1]\lambda_{22},$$
$$\mu_\tau = (\nu_1 + 1)\lambda_1, \cdots, \quad \mu_1 = (\tau\nu_1 + 1)\lambda_1, \quad \lambda_{21} = [(\tau + 1)\nu_1 + 1]\lambda_1,$$
$$p + \mu'_\sigma - (\nu_{21} + 2)\lambda_{21} + \mu_1 = 0.$$

On trouve

$$\lambda_1 = (\sigma + 1)\nu_{22} + 1. \quad \lambda_{22} = (\tau + 1)\nu_1 + 1$$

et pour p, la seconde valeur trouvée plus haut.

15. Nous allons maintenant examiner les différents cas rencontrés dans notre première note. Nous supposerons en premier lieu que le point $\overline{A'_1}$ est simple pour la surface $\Phi'(\rho'' = 1)$ et que, par conséquent, on a $l = \nu_{21}$, $\lambda = \nu_{21} + 1$ et $\sigma = 0$. D'autre part, nous supposerons que la courbe γ_{21} (qui est rencontrée en un point par les courbes Γ_2) ne passe pas par A'_1. Dans ces conditions, on a

$$p = (\tau + 1)\nu_1(\nu_2 + \nu_{21}\nu_{22}) + \nu_1\nu_{21} + \nu_{21}\nu_{22} + \nu_1 + \nu_2,$$

en posant, pour abréger, $\nu_2 = \nu_{21} + \nu_{22}$.

En tenant compte de cette valeur de p, on trouvera l'expression de h en fonction de ν_1, ν_{21}, ν_{22} et de τ en évaluant le nombre des points d'intersection d'une courbe C_p et d'une courbe C'_1 absorbés en A; on trouvera k et j en évaluant le nombre des intersections de deux courbes C'_1, puis d'une courbe C_2 et d'une courbe C'_1 absorbée en A. Enfin, la valeur de i s'obtiendra en opérant de même soit avec deux courbes $\overline{C'_1}$, soit avec une courbe $\overline{C'_1}$ et une courbe C_2 (on trouvera la même valeur de i).

1^er^ cas. — $\rho = \nu_1 + \nu_2 + \nu_{21}\nu_{22}$, $\rho_1 = \nu_2 + \nu_{21}\nu_{22}$, $\rho_2 = \nu_2$,
$\rho'_2 = \nu_2 + \nu_{21}$, $\rho_3 = 2\nu_{21} + 1$, $\rho_4 = \nu_{22}$.

On trouve

$$h = (\tau + 1)(\nu_2 + \nu_{21}\nu_{22}) + \nu_{21},$$
$$k = (\tau + 1)\nu_1(\nu_{22} + 1) + \nu_1 + \nu_{22},$$
$$j(\nu_{21} + 1) = (\tau + 1)\nu_1,$$
$$i(\nu_{21} + 2) = (\tau + 1)\nu_1(\nu_{22} + 2) + \nu_1 + \nu_{22} + 1,$$

2^me^ cas. — $\rho = \nu_1 + \nu_2 + \nu_{21}\nu_{22}$, $\rho_1 = \nu_2 + \nu_{21}\nu_{22}$, $\rho_2 = \nu_2$,
$\rho'_2 = \nu_2 + \nu_{21}$, $\rho_3 = 2\nu_{21} + 1$, $\rho_4 = 2\nu_{21}$.

On a

$$h = (\tau + 1)(\nu_2 + \nu_{21}\nu_{22}) + \nu_{21},$$
$$k = (\tau + 1)\nu_1(\nu_{22} + 1) + \nu_1 + \nu_{22},$$
$$j(\nu_{21} + 1) = (\tau + 1)\nu_1,$$
$$i(\nu_{21} + 2) = (\tau + 1)\nu_1(\nu_{22} + 2) + \nu_1 - \nu_{21} + \nu_{22} + 1.$$

3^me^ cas. — $\rho = \nu_1 + \nu_2 + \nu_{21}\nu_{22}$, $\rho_1 = \nu_2 + \nu_{21}\nu_{22}$, $\rho_2 = \nu_{21}(\nu_{22} + 1)$,
$\rho'_2 = \nu_{21}(\nu_{22} + 1) + 1$, $\rho_3 = 2\nu_{21} + 1$, $\rho_4 = \nu_{21}$.

On a

$$h = (\tau + 1)(\nu_2 + \nu_{21}\nu_{22}) + \nu_{21},$$
$$k = (\tau + 1)\nu_1(\nu_{22} + 1) + \nu_1 + \nu_{22},$$
$$j(\nu_{21} + 1) = (\tau + 1)\nu_1 - \nu_{21} + 1,$$
$$i(\nu_{21} + 2) = (\tau + 1)\nu_1(\nu_{22} + 2) + \nu_1 + \nu_{22} + 1.$$

4^me^ cas. — $\rho = \nu_1 + \nu_2 + \nu_{21}\nu_{22}$, $\rho_1 = \nu_2 + \nu_{21}\nu_{22}$, $\rho_2 = \nu_{21}(\nu_{22} + 1)$,
$\rho'_2 = \nu_{21}(\nu_{22} + 1) + 1$, $\rho_3 = 2\nu_{21} + 1$, $\rho_4 = 2\nu_{21}$.

On trouve

$$h = (\tau + 1)(\nu_2 + \nu_{21}\nu_{22}) + 1,$$
$$k = (\tau + 1)\nu_1(\nu_{22} + 1) + \nu_1 + \nu_{22},$$
$$j(\nu_{21} + 1) = (\tau + 1)\nu_1 - \nu_{21} + 1,$$
$$i(\nu_{21} + 2) = (\tau + 1)\nu_1(\nu_{22} + 2) + \nu_1 - \nu_{21} + \nu_{22} + 1.$$

16. Continuons à supposer que la courbe γ_{21} ne passe pas par le point A'_1, mais admettons que le point $\overline{A'_1}$ soit double conique pour la surface Φ'. Nous avons donc $\rho'' = 2$, $l = 2\nu_{21}$, $\lambda = \nu_{21}$ et $\sigma = 1$. Par conséquent,

$$p = (\tau + 1)\nu_1(\nu_2 + 2\nu_{21}\nu_{22}) + 2\nu_1\nu_{21} + 2\nu_{21}\nu_{22} + \nu_1 + \nu_2.$$

Nous avons encore quatre cas à considérer, mais dans tous les cas, on a

$$\rho = \nu_1 + \nu_2 + 2\nu_{21}\nu_{22}, \quad \rho_1 = \nu_2 + 2\nu_{21}\nu_{22}$$

et on trouve les mêmes expressions de h, k :

$$h = (\tau + 1)(\nu_2 + 2\nu_{21}\nu_{22}) + 2\nu_{21},$$
$$k = (\tau + 1)\nu_1(2\nu_{22} + 1) + 2(\nu_1 + \nu_{22}).$$

1^er cas. — $\rho_2 = \nu_2$, $\rho_2' = \nu_2 + 2\nu_{21}$, $\rho_3 = 3\nu_{21} + 1$, $\rho_4 = \nu_{21} + 1$.

$$j(2\nu_{21} + 1) = (\tau + 1)\nu_1,$$
$$i(\nu_{21} + 1) = (\tau + 1)\nu_1(\nu_{22} + 1) + \nu_1 + \nu_{22}.$$

2^me cas. — $\rho_2 = \nu_2$, $\rho_2' = \nu_2 + 2\nu_{21}$, $\rho_3 = 3\nu_{21} + 1$, $\rho_4 = 3\nu_{21} - 1$.

$$j(2\nu_{21} + 1) = (\tau + 1)\nu_1,$$
$$i(\nu_{21} + 1) = (\tau + 1)\nu_1(\nu_{22} + 1) + \nu_1 - \nu_{21} + \nu_{22} + 1.$$

3^me cas. — $\rho_2 = \nu_{21}(2\nu_{22} + 1)$, $\rho_2' = \nu_{21}(2\nu_{22} + 1) + 1$, $\rho_3 = 3\nu_{21} + 1$, $\rho_4 = \nu_{21} + 1$.

$$j(2\nu_{21} + 1) = (\tau + 1)\nu_1 - 2\nu_{21} + 1,$$
$$i(\nu_{21} + 1) = (\tau + 1)\nu(\nu_{22} + 1) + \nu_1 + \nu_{22}.$$

4^me cas. — $\rho_2 = \nu_{21}(2\nu_{22} + 1)$, $\rho_2' = \nu_{21}(2\nu_{22} + 1) + 1$, $\rho_3 = 3\nu_{21} + 1$, $\rho_4 = 3\nu_{21} - 1$.

$$j(2\nu_{21} + 1) = (\tau + 1)\nu_1 - 2\nu_{21} + 1,$$
$$i(\nu_{21} + 1) = (\tau + 1)\nu_1(\nu_{22} + 1) + \nu_1 - \nu_{21} + \nu_{22} + 1.$$

17. Nous supposerons maintenant que la courbe γ_{21} passe par le point A_1', mais que le point $\overline{A_1'}$ est simple pour la surface Φ'. On aura donc $l = \nu_{21}$, $\lambda = \nu_{21} + 1$, $\rho'' = 1$, $\sigma = 0$ et

$$p = (\tau + 1)\nu_1(\nu_2 + \nu_{21}\nu_{22}) + \nu_1\nu_{22} + \nu_{21}\nu_{22} + \nu_1 + \nu_2.$$

On a

$$\rho = \nu_1 + \nu_2 + \nu_{21}\nu_{22}, \quad \rho_1 = \nu_2 + \nu_{21}\nu_{22}, \quad \rho_2 = \nu_2 \text{ ou } \rho_2 = \nu_{21}(\nu_{22} + 1).$$

Si $\rho_2 = \nu_2$, on a

$$\rho_1(\nu_{21} + 1)j = (\tau + 1)\nu_1\rho_1 - \nu_1(\nu_{21} - \nu_{22}).$$

Il en résulte que $\nu_1(\nu_{21} - \nu_{22})$ est multiple de ρ_1. Mais on peut écrire

$$p = (\tau + 1)\nu_1\rho_1 + \rho_1 + \nu_1(\nu_{22} + 1);$$

par suite, p étant premier et ν_1, ρ_1 inférieurs à p, ν_1 et ρ_1 doivent être premiers entre eux. Par conséquent, ρ_1 divise $\nu_{21} - \nu_{22}$. Cela est absurde, car ρ_1 est supérieure à $|\nu_{21} - \nu_{22}|$.

Si $\rho_2 = \nu_{21}(\nu_{22} + 1)$, on trouve

$$\rho_1(\nu_{21} + 1)j = (\tau + 1)\nu_1\rho_1 - (\nu_{21} - 1)\rho_1 - \nu_1(\nu_{21} - \nu_{22})$$

et on est conduit à la même conclusion.

Supposons maintenant que le point $\overline{A}_1'$ soit double pour la surface Φ' ($\rho'' = 2$). On a cette fois

$$\rho = \nu_1 + \nu_2 + 2\nu_{21}\nu_{22}, \quad \rho_1 = \nu_2 + 2\nu_{21}\nu_{22}, \quad l = 2\nu_{21}.$$

Si $\rho_2 = \nu_2$, on trouve

$$\rho_1(2\nu_{21} + 1)j = (\tau + 1)\nu_1\rho_1 - \nu_1(2\nu_{21} - \nu_{22}).$$

Si $\rho_2 = \nu_{21}(2\nu_{22} + 1)$, on a

$$\rho_1(2\nu_{21} + 1)j = (\tau + 1)\nu_1\rho_1 - (2\nu_{21} - 1)\rho_1 - \nu_1(2\nu_{21} - \nu_{22}).$$

Dans chaque cas, on est conduit comme plus haut à une absurdité.

Il en résulte que la courbe γ_{21} de la surface Φ', rencontrée en un point par les courbes C_2, ne peut passer par le point A_1'.

18. Nous avons vu que le point A_1' est en plus double pour la surface Φ'. Nous avons supposé que ce point était équivalent à un ensemble de τ courbes rationnelles de degré -2. Si τ est pair ($\tau = 2\eta$), le point A_1' est double biplanaire pour la surface Φ' et est l'origine d'une suite de η points doubles biplanaires infiniment voisins successifs dont le dernier est biplanaire ordinaire. Si τ est impair ($\tau = 2\eta + 1$), le point A_1' est l'origine d'une suite de $\eta + 1$ points doubles de la surface Φ', les η premiers étant biplanaires et le dernier conique.

Supposons τ pair ($\tau = 2\eta$) et appelons Γ_1^* les sections de la surface Φ' par les hyperplans contenant les η points doubles infiniment voisins successifs partant de A_1' et par le point simple infiniment voisin du dernier de ces points. Le système linéaire $|\Gamma_1^*|$ a le degré $n - \nu_1 - \nu_2 - \tau - 1$ et le genre $\pi - (\nu_2 + \nu_2 - 1) - \eta$. Désignons par C_1^* les courbes C_1 qui correspondent sur F aux courbes Γ_1^*.

Si nous rapportons projectivement les courbes Γ_1^* aux hyperplans d'un espace linéaire à $r_1 - \eta - 2$ dimensions, il correspond à la surface Φ', dans cet espace, une surface Φ^* dont les sections hyperplanes correspondent aux courbes C_1^*. Aux courbes $\gamma_1, \gamma_{21}, \gamma_{22}$ de Φ' correspondent sur Φ^* des courbes que nous désignerons par les mêmes symboles et qui sont respectivement d'ordres $\nu_1 - 1$, $\nu_{21}, \nu_{22} - 1$. De plus, au point simple du domaine d'ordre $\eta + 1$ de A'_l sur Φ', commun à toutes les courbes Γ_1^*, correspond sur Φ^* une droite s, de degré -1 (exceptionnelle), s'appuyant sur les courbes γ_1 et γ_{22}. Il en résulte que les courbes C_1^* de F ont la multiplicité $\nu_1 - 1$ en P_h, ν_{21} en Q_k et $\nu_{22} - 1$ en R_l. De plus, elles ont en commun un point simple fixe T_m, uni parfait de l'involution I_p, dont le domaine correspond à la droite s et qui est le dernier d'une suite de points infiniment voisins successifs d'un point P, Q ou R, communs à toutes les courbes C_1^*.

Supposons maintenant τ impair ($\tau = 2\eta + 1$) et appelons encore Γ_1^* les sections de la surface Φ' par les hyperplans passant par les $\eta + 1$ points doubles infiniment voisins successifs d'origine A'_1 sur Φ'. Le système linéaire $|\Gamma_1^*|$ a encore le degré $n - \nu_1 - \nu_2 - \tau - 1$, mais son genre est égal à $\pi - (\nu_1 + \nu_2 - 1) - \eta - 1$. Soient encore C_1^* les courbes C_1 qui correspondent sur F aux courbes Γ_1^*.

Construisons encore une surface Φ^* dont les sections hyperplanes soient les courbes Γ_1^* et soient $\gamma_1, \gamma_{21}, \gamma_{22}$ les courbes de cette surface qui correspondent aux courbes de Φ' représentées par les mêmes symboles. Ces courbes ont encore les ordres respectifs $\nu_1 - 1$, ν_{21}, $\nu_{22} - 1$. Au point double conique du domaine d'ordre $\eta + 1$ de A'_1 sur Φ' correspond sur Φ^* une conique s, de degré -2, rencontrant les courbes γ_1 et γ_{22} Par conséquent, les courbes C_1^* ont les multiplicités $\nu_1 - 1$ en P_h, ν_{21} en Q_k, $\nu_{22} - 1$ en R_l; elles ont de plus en commun un point double T_m, uni parfait par I_p, fixe, dont le domaine correspond à la conique s. Ce point est le dernier d'une suite de points $T_1, T_2, \ldots, T_m$, appartenant aux courbes C_1^*, infiniment voisins successifs d'un point P, Q ou R.

Pour étudier ces particularités, nous observerons que le nombre de points communs à une courbe C_1^* et à une courbe C_2 ou C_p, absorbés en A, est multiple de p. D'autre part, le nombre de points d'intersection de deux courbes C_1^*, absorbés en A, est égal à $p(\nu_1 + \nu_2 + \tau + 1)$ dans chaque cas. Enfin, nous appliquerons la formule de Zeuthen à la correspondance entre une courbe Γ_1^* et la courbe C_1^* homologue.

Nous nous bornerons d'ailleurs, pour éviter d'allonger outre mesure cette note, au premier cas rencontré plus haut (nº 15). Les autres cas se traitent en effet par la même méthode.

19. Nous supposerons en premier lieu que la suite de points infiniment voisins successifs $T_1, T_2, \ldots, T_m$ communs à toutes les courbes C_1^* commence par un point T_1 du domaine de P_t. Soient alors α la multiplicité des courbes C_1^* en A; $\alpha_{11}, \alpha_{12}, \ldots, \alpha_{1h} = \nu_1 - 1$ leurs multiplicités en $P_1, P_2, \ldots, P_h$; $\alpha_{21}, \alpha_{22}, \ldots, \alpha_{2k} = \nu_{21}$ leurs multiplicités en $Q_1, Q_2, \ldots, Q_k$; $\alpha'_{11}, \alpha'_{12}, \ldots, \alpha'_{1m}$ leurs multiplicités en $T_1, T_2, \ldots, T_m$; enfin $\alpha'_{21}, \alpha'_{22}, \ldots, \alpha'_{2l}$ leurs multiplicités en $R, R_2, \ldots, R_l$.

Si l'on tient compte de la disposition des points Q et R (nº 7) on a

$$\alpha_{2j+1} = \alpha_{2j+2} = \cdots = \alpha_{2k} = \nu_{21}, \quad \alpha'_{21} = \alpha'_{22} = \cdots = \alpha'_{2l} = \nu_{22} - 1,$$
$$\alpha_{2j} = \nu_2 - 1, \quad \alpha_{21} = \alpha_{22} = \cdots = \alpha_{2j-1} = \nu_{22}(\nu_{21} + 1) - 1.$$

En considérant les intersections absorbées en A des courbes C_1^*, C_2, on a

$$\alpha + (j-1)[\nu_{22}(\nu_{21}+1) - 1] + \nu_2 - 1 + (k-j)\nu_{21} = \mu p,$$

μ étant un entier positif. En tenant compte des valeurs de j et de k trouvées plus haut, on en déduit

$$\alpha = (\mu - 1)p + (\tau + 2)\nu_1 + \nu_{22}(\nu_{21} + 1).$$

α devant être inférieur à p, on a $\mu = 1$ et

$$\alpha = (\tau + 2)\nu_1 + \nu_{22}(\nu_{21} + 1).$$

On a, d'autre part, $\alpha = \alpha_{11} + \alpha_{21}$; donc

$$\alpha_{11} = (\tau + 2)\nu_1 + 1.$$

On a aura ensuite

$$\alpha_{11} = \alpha_{12} = \cdots = \alpha_{1t-1} = (\tau + 2)\nu_1 + 1, \quad \alpha_{1t+1} = \cdots = \alpha_{1h} = \nu_1 - 1.$$

Le nombre de points d'intersection de deux courbes C_1^*, C_p absorbés en A est donné par

$$\alpha + (t-1)\alpha_{11} + \alpha_{1t} + (h-t)(\nu_1 - 1) = \mu p, \tag{1}$$

μ étant un entier positif.

Une courbe C'_1 et une courbe C_1^* ont $p(\nu_1 + \nu_2)$ points d'intersection absorbés en A. On a donc

$$\left.\begin{aligned} &\alpha\rho + \nu_1[(t-1)\alpha_{11} + \alpha_{1t} + (h-t)(\nu_1 - 1)] + (j-1)\rho_1\alpha_{21} \\ &\quad + \rho_2\alpha_{2j} + (k-j)\nu_{21}^2 + \nu_{21}\nu_{22}(\nu_{22} - 1) = p(\nu_1 + \nu_2). \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

En tenant compte de la relation (1) et en remplaçant ρ, ρ_1, ρ_2,

α, α_{21}, α_{2j} par leurs valeurs, on trouve facilement $\mu = 1$. La relation (1) s'écrit alors

$$t[(\tau+1)\nu_1+2]+\alpha_{1t}=(\tau+1)(\nu_2+\nu_{21}\nu_{22})+\nu_1+2\nu_{21}+1. \tag{3}$$

20. L'évaluation du nombre des points d'intersection de deux courbes C_1^* absorbés en A donne

$$\left.\begin{aligned}&\alpha^2+(t-1)\alpha_{11}^2+\alpha_{1t}^2+(h-t)(\nu_1-1)^2+\Sigma\alpha_{11}'^2+(j-1)\alpha_{21}^2\\&+\alpha_{2j}^2+(k-j)\nu_{21}^2+\nu_{21}(\nu_{22}-1)^2=p(\nu_1+\nu_2+\tau+1).\end{aligned}\right\} \tag{4}$$

Supposons τ pair et appliquons la formule de Zeuthen à la correspondance entre une courbe Γ_1^* et la courbe C_1^* homologue. La courbe Γ_1^* est de genre $\pi-(\nu_1-\nu_2+1)-\tau$ et possède $\nu_1+\nu_2-1$ points de diramation. En tenant compte des relations (1), (4) et des valeurs de α, α_{21}, α_{2j}, on trouve aisément

$$\alpha_{11}'+\alpha_{12}'+\cdots+\alpha_{1m}'=(\tau+1)\nu_1+1. \tag{5}$$

On en déduit

$$\alpha_{11}'+\alpha_{12}'+\cdots+\alpha_{1m}'+\nu_1=\alpha_{11}.$$

D'autre part, en examinant le passage du point P_{t-1} au point P_t, nous avons

$$\alpha_{11}=\alpha_{1t}+\lambda\alpha_{11}', \quad \alpha_{11}'=\alpha_{12}'=\cdots=\alpha_{1\lambda}',$$

où λ est un entier positif. Si $\lambda > 1$, on a $\alpha_{1t}=\alpha_{11}'+\nu_1-1$; d'où

$$\alpha_{11}'+\alpha_{12}'+\cdots+\alpha_{1m}'=(\lambda+1)\alpha_{11}'-1.$$

Comme $\lambda \leq m$, on a $\alpha_{11}'=\alpha_{12}'=\ldots=\alpha_{1m}'=1$, $\lambda=m$.

Si $\lambda=1$, on a $\alpha_{1t}=\lambda'\alpha_{11}'+\nu_1-1$, où λ' est un entier positif. On en déduit, comme dans la première hypothèse, $\lambda'=m$ et $\alpha_{11}'=\alpha_{12}'=\ldots=\alpha_{1m}'=1$.

Nous trouvons donc deux cas :

1° $\alpha_{1t}=\nu_1$ et une suite de $m=(\tau+1)\nu_1+1$ points simples $T_1, T_2, \ldots, T_m$ succédant au point P_t;

2° $\alpha_{16}=(\tau+2)\nu_1$ et une suite de $m=(\tau+1)\nu_1+1$ points simples $T_1, T_2, \ldots, T_m$ succédant au point P_t.

Supposons maintenant τ impair et appliquons la formule de Zeuthen dans les mêmes conditions que tantôt. On trouve cette fois $\nu_1+\nu_2$ point de diramation sur une courbe Γ_1^* et on arrive à la relation

$$\alpha_{11}'+\alpha_{12}'+\cdots+\alpha_{1m}'=(\tau+1)\nu_1.$$

On en déduit

$$\alpha'_{11} + \alpha'_{12} + \cdots + \alpha'_{1m} + \nu_1 + 1 = \alpha_{11}.$$

Actuellement, on a $\alpha'_{1m} = 2$. On peut reprendre le raisonnement fait plus haut et on arrive à deux cas possibles :

3° $\alpha_{1t} = \nu_1 + 1, \quad m = \frac{1}{2}(\tau + 1)\nu_1, \quad \alpha'_{11} = \alpha'_{12} = \cdots = \alpha'_{1m} = 2$;

4° $\alpha_{1t} = (\tau + 2)\nu_1 - 1, \quad m = \frac{1}{2}(\tau + 1)\nu_1, \quad \alpha'_{11} = \alpha'_{12} = \cdots = \alpha'_{1m} = 2.$

21. Reprenons la relation (4) en y introduisant les valeurs trouvées pour α, α_{11}, α_{21}, α_{2j}, h, j et k ; nous obtenons la relation

$$(\tau + 3)[(\tau + 1)\nu_1 + 2]\nu_1 t + \alpha_{1t}^2 + \Sigma \alpha'^2_{11} = (\tau + 1)^2 \nu_1(\nu_2 + \nu_{21}\nu_{22})$$
$$+ 2(\tau + 1)\nu_1[\nu_2 + \nu_{21}\nu_{22} + \nu_{21} + 1] + \nu_1(\nu_1 + 4\nu_{21} + 1) + 1.$$

En tenant compte de l'équation (3), on en déduit

$$\alpha_{1t}^2 - (\tau + 3)\nu_1\alpha_{1t} + \Sigma\alpha'^2_{11} + (\tau + 1)\nu_1(\nu_1 - 1) + \nu_1^2 - 1 = 0.$$

Si les points $T_1, T_2, \ldots, T_m$ sont simples pour les courbes C_1^*, on a

$$\alpha_{1t}^2 - (\tau + 3)\nu_1\alpha_{1t} + (\tau + 2)\nu_1^2 = 0,$$

équation dont les racines sont les valeurs $\alpha_{1t} = \nu_1$. $\alpha_{1t} = (\tau + 2)\nu_1$ trouvées haut dans les premier et second cas.

Si les points $T_1, T_2, \ldots, T_m$ sont doubles pour les courbes C_1^*, on a

$$\alpha_{1t}^2 - (\tau + 3)\nu_1\alpha_{1t} + (\tau + 2)\nu_1(\nu_1 + 1) - (\nu_1 + 1) = 0.$$

Les racines de cette équation sont les valeurs $\alpha_{1t} = \nu_1 + 1$, $\alpha_{1t} = (\tau + 2)\nu_1 - 1$ trouvées plus haut dans les troisième et quatrième cas

On a donc quatre cas possibles :

1° τ pair, $\alpha_{1t} = \nu_1$, $m = (\tau + 1)\nu_1 + 1$,

$$t[(\tau + 1)\nu_1 + 2] = (\tau + 1)(\nu_2 + \nu_{21}\nu_{22}) + 2\nu_{21} + 1.$$

2° τ pair, $\alpha_{1t} = (\tau + 2)\nu_1$, $m = (\tau + 1)\nu_1 + 1$,

$$t[(\tau + 1)\nu_1 + 2] = (\tau + 1)(\nu_2 + \nu_{21}\nu_{22} - \nu_1) + 2\nu_{21} + 1.$$

3° τ impair, $\alpha_{1t} = \nu_1 + 1$, $m = \frac{1}{2}(\tau + 1)\nu_1$,

$$t[(\tau + 1)\nu_1 + 2] = (\tau + 1)(\nu_2 + \nu_{21}\nu_{22}) + 2\nu_{21}.$$

4° τ impair, $\alpha_{1t} = (\tau + 2)\nu_1 - 1$, $m = \frac{1}{2}(\tau + 1)\nu_1$,

$$t[(\tau + 1)\nu_1 + 2] = (\tau + 1)(\nu_2 + \nu_{21}\nu_{22} - \nu_1) + 2\nu_{21}.$$

22. Supposons maintenant que la suite de points infiniment voisins successifs $T_1, T_2, \ldots, T_m$ commence en un point T_1 du domaine du point Q_t $(1 \leq t < j)$. Conservons les mêmes notations pour désigner les multiplicités des points P, Q, R, T pour les courbes C_1^*.

Nous avons tout d'abord

$$\rho_{11} = \rho_{12} = \cdots = \rho_{1h} = \nu_1 - 1;$$

d'où, par

$$\alpha + h(\nu_1 - 1) = p,$$

on a

$$\alpha = (\tau + 2)(\nu_2 + \nu_{21}\nu_{22}) + \nu_1 + \nu_{21}.$$

On a ensuite

$$\alpha_{21} = \alpha_{22} = \cdots = \alpha_{2t-1} = \alpha - \alpha_{11} = (\tau + 2)(\nu_2 + \nu_{21}\nu_{22}) + \nu_{21} + 1.$$

D'autre part, on a

$$\alpha_{2j+1} = \cdots = \alpha_k = \nu_{21}, \quad \alpha'_{21} = \cdots = \alpha'_{2l} = \nu_{22} - 1;$$

d'où

$$\alpha_{2j} = \nu_2 - 1$$

et

$$\alpha_{2t+1} = \cdots = \alpha_{2j-1} = \nu_2 + \nu_{21}\nu_{22} - (\nu_{21} + 1) = \nu_{22}(\nu_{21} + 1) - 1.$$

En considérant les intersections des courbes C_1^*, C_2 absorbées en A, on a

$$[(\tau + 1)(\nu_2 + \nu_{21}\nu_{22}) + 2(\nu_{21} + 1)]t + \alpha_{2t} = (\tau + 1)\nu_1 + \nu_{22}(\nu_{21} + 1) + 1.$$

La formule de Zeuthen, appliquée à la correspondance entre deux courbes Γ_1^* et C_1^* homologues, donne, quand τ est pair,

$$\alpha'_{11} + \alpha'_{12} + \cdots + \alpha'_{1m} = (\tau + 1)(\nu_2 + \nu_{21}\nu_{22}) + 2\nu_{21} + 1.$$

En raisonnant comme plus haut, on trouve que :

1° $\alpha_{2t} = \nu_{22}(\nu_{21} + 1), \quad \alpha'_{11} = \alpha'_{12} = \cdots = \alpha'_{1m} = 1, \quad m = (\tau + 1)(\nu_2 + \nu_{21}\nu_{22}) + 2\nu_{21} + 1$
et $[(\tau + 1)(\nu_2 + \nu_{21}\nu_{22}) + 2(\nu_{21} + 1)]t = (\tau + 1)\nu_1 + 1.$

2° $\alpha_{2t} = (\tau + 2)(\nu_2 + \nu_{21}\nu_{22}) + \nu_{21}, \quad \alpha'_{11} = \alpha'_{12} = \cdots = \alpha'_{1m} = 1,$

$$m = (\tau + 1)(\nu_2 + \nu_{21}\nu_{22}) + 2\nu_{21} + 1,$$

$$[(\tau + 1)(\nu_2 + \nu_{21}\nu_{22}) + 2(\nu_{21} + 1)]t = (\tau + 1)(\nu_1 - \nu_2 - \nu_{21}\nu_{22}) - \nu_{21} + 1.$$

Quand τ est impair, on a

$$\alpha'_{11} + \alpha'_{12} + \cdots + \alpha'_{1m} = (\tau + 1)(\nu_2 + \nu_{21}\nu_{22}) + 2\nu_{21},$$

et deux cas peuvent se présenter :

$$3^{\circ} \quad \alpha_{2t} = \nu_{22}(\nu_{21}+1)+1, \quad \alpha'_{11} = \cdots = \alpha'_{1m} = 2,$$
$$m = \tfrac{1}{2}(\tau+1)(\nu_2+\nu_{21}\nu_{22})+\nu_{21},$$
$$[(\tau+1)(\nu_2+\nu_{21}\nu_{22})+2(\nu_{21}+1)]t = (\tau+1)\nu_1.$$

$$4^{\circ} \quad \alpha_{2t} = (\tau+2)(\nu_2+\nu_{21}\nu_{22})-1, \quad \alpha'_{11} = \cdots = \alpha'_{1m} = 2,$$
$$m = \tfrac{1}{2}(\tau+1)(\nu_2+\nu_{21}\nu_{22})+\nu_{21},$$
$$[(\tau+1)(\nu_2+\nu_{21}\nu_{22})+2(\nu_{21}+1)]t = (\tau+1)(\nu_1-\nu_2-\nu_{21}\nu_{22})-\nu_{21}+2.$$

En évaluant le nombre de points d'intersection des courbes C_1^* absorbés en A, on obtient la relation

$$\alpha_{2t}^2-(\tau+3)(\nu_2+\nu_{21}\nu_{22})\alpha_{2t}+\Sigma\rho_{11}'^2$$
$$+(\nu_{21}\nu_{22}+\nu_{22}-1)(\tau+\nu_{21}\nu_{22}+\nu_{22}+2\nu_{21}+2)=0.$$

Dans le premier cas qui vient d'être rencontré, cette relation donne

$$(\tau+1)(\nu_2+\nu_{21}\nu_{22}-1)(\nu_{22}+\nu_{21}\nu_{22}-1)=0,$$

ce qui est impossible en nombres entiers positifs. On arrive à la même conclusion dans les autres cas. Par conséquent, l'hypothèse envisagée doit être rejetée.

23. Supposons actuellement que le point T_1 soit infiniment voisin du point Q_t $(j < t < k)$ compris entre Q_j et Q_k, et conservons les notations précédentes.

On trouve encore, comme dans l'hypothèse précédente,

$$\alpha = (\tau+2)(\nu_2+\nu_{21}\nu_{22})+\nu_1+\nu_{21}, \quad \alpha_{21} = (\tau+2)(\nu_2+\nu_{21}\nu_{22})+\nu_{21}+1$$

et ensuite, en utilisant les mêmes principes,

$$\alpha_{2j} = (\tau+2)(\nu_2+\nu_{21}\nu_{22})-\nu_{21}\nu_{22}+2\nu_{21}+1,$$
$$\alpha_{2j+1} = \cdots = \alpha_{2t-1} = (\tau+1)(\nu_2+\nu_{21}\nu_{22})+3\nu_{21}+2.$$

L'intersection des courbes C_1^* et C_2 donne

$$t[(\tau+2)(\nu_2+\nu_{21}\nu_{22})+1]+\alpha_{2t} = (\tau+1)\nu_1+\nu_{21}+2.$$

La relation donnée par l'application de la formule de Zeuthen à la correspondance entre deux courbes Γ_1^* et C_1^* est toujours valable et donne dans ce cas, si τ est pair,

$$\alpha'_{11}+\alpha'_{12}+\cdots\alpha'_{1m}+\nu_{21}+1 = \alpha_{2t-1}.$$

Comme tantôt, deux cas peuvent se présenter :

1° $$\alpha_{2t} = \nu_{21} + 1, \quad \alpha'_{11} = \alpha'_{12} = \cdots = \alpha'_{1m} = 1,$$
$$m = (\tau + 1)(\nu_2 + \nu_{21}\nu_{22}) + 2\nu_{21} + 1,$$
$$[(\tau + 2)(\nu_2 + \nu_{21}\nu_{22}) + 1]l = (\tau + 1)\nu_1 + 1.$$

2° $$\alpha_{2t} = (\tau + 1)(\nu_2 + \nu_{21}\nu_{22}) + 3\nu_{21} + 1, \quad \alpha'_{11} = \cdots = \alpha'_{1m} = 1,$$
$$m = (\tau + 1)(\nu_2 + \nu_{21}\nu_{22}) + 2\nu_{21} + 1,$$
$$[(\tau + 2)(\nu_2 + \nu_{21}\nu_{22}) + 1]l = (\tau + 1)(\nu_1 - \nu_2 - \nu_{21}\nu_{22}) - \nu_{21} + 1.$$

Si τ est impair, la formule de Zeuthen donne
$$\alpha'_{11} + \alpha'_{12} + \cdots + \alpha'_{1m} + \nu_{21} + 2 = \alpha_{2t-1}.$$

On a deux cas à examiner :

3° $$\alpha_{2t} = \nu_{21} + 2, \quad \alpha'_{11} = \cdots = \alpha'_{1m} = 2, \quad 2m = (\tau + 1)(\nu_2 + \nu_{21}\nu_{22}) + 2\nu_{21},$$
$$[(\tau + 2)(\nu_2 + \nu_{21}\nu_{22}) + 1]l = (\tau + 1)\nu_1.$$

4° $$\alpha_{2t} = (\tau + 1)(\nu_2 + \nu_{21}\nu_{22}) + 3\nu_{21},$$

$\alpha'_{11}, \cdots, \alpha'_{1m}$ et m ayant les mêmes valeurs que dans le cas précédent. On a
$$[(\tau + 2)(\nu_2 + \nu_{21}\nu_{22}) + 1]l = (\tau + 1)(\nu_1 - \nu_2 - \nu_{21}\nu_{22}) - 2(\nu_{21} - 1).$$

Dans les quatre cas, la relation donnant t est incompatible avec l'hypothèse $j < l$ faite au début. Ces quatre cas doivent donc être éliminés.

24. Il nous reste à envisager l'hypothèse où le point T_1 est infiniment voisin d'un point de la suite $R_1, R_2, \ldots, R_l$, par exemple de R_t $(0 < t < l)$.

En conservant toujours les mêmes notations, nous avons encore
$$\alpha = (\tau + 2)(\nu_2 + \nu_{21}\nu_{22}) + \nu_1 + \nu_{21},$$
$$\alpha_{21} = (\tau + 2)(\nu_2 + \nu_{21}\nu_{22}) + \nu_{21} + 1.$$

Si x est la multiplicité du point R_1 pour les courbes C_1^*, nous avons, en considérant l'intersection de deux courbes C_1^*, C_2,
$$j[(\tau + 2)(\nu_2 + \nu_{21}\nu_{22}) + 1] + x = (\tau + 1)\nu_1\nu_{22} + \nu_{22} - 1.$$

Comme on a
$$j(\nu_{21} + 1) = (\tau + 1)\nu_1,$$
cette relation peut s'écrire
$$j[(\tau + 1)(\nu_2 + \nu_{21}\nu_{22}) + \nu_{21} + 1] = \nu_{22} - 1 - x.$$

Or, on a $x > \nu_{22} - 1$; on est donc conduit à une contradiction.

Il résulte de tout ceci que la suite $T_1, T_2, \ldots, T_m$ se détache nécessairement de la suite $P_1, P_2, \ldots, P_h$.

Liége, le 18 mars 1940.