Extrait des Mémoires de la Société royale des Sciences de Liége,
Séance du 16 juin 1942. — N° 6.

Sur certaines congruences de Goursat,

par LUCIEN GODEAUX, Membre de la Société.

On sait qu'à trois points consécutifs x_{-1}, x, x_1 d'une suite de Laplace on peut associer deux coniques : les coniques de Koenigs-Darboux, qui ne coïncident que si le réseau (x) est à invariants égaux. A quatre points consécutifs y_1, y, z, z_1 d'une suite de Laplace, Tzitzeica a attaché deux quadriques [1]; ces quadriques coïncident lorsque la congruence (yz) est une congruence de Goursat. Dans cette note nous montrons que l'on peut attacher aux quatre points y_1, y, z, z_1 deux cubiques gauches. La coïncidence de ces deux courbes entraîne la fermeture de la suite de Laplace dans les deux sens.

1. Soient y, z deux points dépendant de deux variables u, v et consécutifs dans une suite de Laplace. On peut écrire

$$y^{10} = \alpha z, \quad z^{01} = \beta y,$$

α, β étant deux fonctions de u, v. Nous posons, pour simplifier l'écriture,

$$\varphi^{ik} = \frac{\partial^{i+k} \varphi}{\partial u^i \, \partial v^k}.$$

Le transformé de Laplace de y dans le sens des u est le point z; le transformé de y dans le sens des v est le point

$$y_1 = y^{01} - y\,(\log \alpha)^{01}.$$

On a

$$y_1^{10} = \alpha_1 y, \quad \alpha_1 = -(\log \alpha)^{11} + \alpha\beta.$$

De même, le transformé de Laplace de z dans le sens des u est

$$z_1 = z^{10} - z\,(\log \beta)^{10},$$

et l'on a

$$z_1^{01} = \beta_1 z, \quad \beta_1 = -(\log \beta)^{11} + \alpha\beta.$$

Nous supposerons que les points y_1, y, z, z_1 n'appartiennent pas à un même plan.

---

(1) Sur certaines congruences de droites (*Journal de Mathématiques*, 1928, pp. 189-208).

2. Un point de l'espace déterminé par les points y_1, y, z, z_1 peut être représenté par

$$\eta_1 y_1 + \eta_0 y_0 + \zeta_0 z + \zeta_1 z_1,$$

η_1, η_0 ζ_0, ζ_1 étant les coordonnées locales du point considéré.

Considérons la cubique gauche K commune, en dehors de la droite $y_1 z_1$, aux deux cônes

$$\eta_0^2 = \lambda \eta_1 \zeta_0, \quad \zeta_0^2 = \mu \zeta_1 \eta_0.$$

Nous déterminerons λ et μ par la condition que la cubique K ait un contact du second ordre avec la courbe u tracée sur la surface (y_1) au point y_1.

Nous avons

$$y_1(u+\varepsilon, v) = y_1 + \frac{\varepsilon}{1} y_1^{10} + \frac{\varepsilon^2}{2!} y_1^{20} + \frac{\varepsilon^3}{3!} y_1^{30} + \cdots,$$

avec

$$y_1^{10} = \alpha_1 y, \quad y_1^{20} = \alpha_1^{10} y + \alpha_1 \beta z, \quad y_1^{30} = \alpha_1^{20} y + 2(\alpha_1\beta)^{10} z + \alpha_1 \beta z_1.$$

Les coordonnées locales du point y_1 $(u+\varepsilon, v)$ sont donc

$$\eta_1 = 1,$$

$$\eta_0 = \alpha_1 \varepsilon + \alpha_1^{10} \frac{\varepsilon^2}{2} + \alpha_1^{20} \frac{\varepsilon^3}{6} + \cdots,$$

$$\zeta_0 = \alpha_1 \beta \frac{\varepsilon^2}{2} + (\alpha_1\beta)^{10} \frac{\varepsilon^3}{3} + \cdots,$$

$$\zeta_1 = \alpha_1 \beta \frac{\varepsilon^3}{6} + \cdots.$$

Portons ces valeurs dans l'équation

$$\eta_0^2 - \lambda \eta_1 \zeta_0 = 0.$$

Pour que l'on puisse en diviser les deux membres par ε^3, on doit avoir

$$2\alpha_1 - \lambda\beta = 0.$$

Portons de même les valeurs de η_1, ... dans l'équation

$$\zeta_0^2 - \mu \zeta_1 \eta_0 = 0.$$

On peut en diviser les deux membres par ε^4; pour qu'on puisse les diviser par ε^5, on doit avoir

$$2\mu = 3\beta.$$

On en conclut que la cubique gauche cherchée est représentée par les équations

$$\left\| \begin{matrix} \beta \eta_{10} & \zeta_0 & 3\beta\zeta_1 \\ 2\alpha_1\eta_{11} & \eta_{10} & 2\zeta_0 \end{matrix} \right\| = 0. \tag{1}$$

La courbe K appartient à la quadrique

$$\eta_{10}\zeta_0 - 3\alpha_1\eta_{11}\zeta_1 = 0,$$

qui est une quadrique de Tzitzeica.

En intervertissant les rôles des points y_1, z_1, on obtient une seconde cubique gauche

$$\left\| \begin{matrix} \alpha\zeta_0 & \eta_{10} & 3\alpha\eta_{11} \\ 2\beta_1\zeta_1 & \zeta_0 & 2\eta_{10} \end{matrix} \right\| = 0. \tag{2}$$

3. La condition pour que les cubiques gauches (1) et (2), tout en étant distinctes, appartiennent à une même quadrique non conique, revient à écrire que les quadriques de Tzitzeica :

$$\eta_{10}\zeta_0 - 3\alpha_1\eta_{11}\zeta_1 = 0, \quad \eta_{10}\zeta_0 - 3\beta_1\eta_{11}\zeta_1 = 0,$$

coïncident. On a alors

$$\alpha_1 = \beta_1 \quad \text{ou} \quad (\log\alpha)^{11} = (\log\beta)^{11}$$

et la droite yz engendre une congruence de Goursat.

Écrivons maintenant que les cubiques (1) et (2) coïncident. Nous trouvons les conditions

$$4\alpha_1 = 4\beta_1 = 3\alpha\beta.$$

On a donc en premier lieu

$$(\log\alpha)^{11} = (\log\beta)^{11}$$

et l'on peut choisir séparément les variables u, v de manière à avoir $\alpha = \beta$. On a alors

$$\alpha_1 = -(\log\alpha)^{11} + \alpha\beta = \frac{3}{4}\alpha\beta = \frac{3}{4}\alpha^2, \ (\log\alpha)^{11} = \frac{1}{4}\alpha\beta = \frac{1}{4}\alpha^2.$$

Le transformé y_2 de y_1 dans le sens des v est donné par

$$y_2 = y_1^{01} - y_1(\log\alpha\alpha_1)^{11} = y_1^{01} - 3y_1(\log\alpha)^{01}.$$

On a donc

$$y_2^{10} = \alpha_2 y_1 = [-(\log\alpha\alpha_1)^{11} + \alpha_1]\eta_1 = 0.$$

De même, si z_2 est le transformé de Laplace de z_1 dans le sens des u, on a

$$z_2 = z_1^{10} - 3\, z_1 (\log \alpha)^{10}, \quad z_2^{01} = 0.$$

On voit donc que la congruence (yz) est une congruence de Goursat et que la suite de Laplace déterminée par les points y_1, y, z, z_1 se termine aux points y_2, z_2 en présentant chaque fois le cas de Laplace.

Liége, le 15 juin 1942.

M. HAYEZ, Imprimeur de l'Académie royale de Belgique, rue de Louvain, 112, Bruxelles.
(Domicile légal: rue de la Chancellerie, 4)

N° Réf. 2019