Sur les points unis de seconde espèce des involutions cycliques appartenant à une variété algébrique,

par LUCIEN GODEAUX, Correspondant de l'Académie.

Considérons une involution cyclique I_p d'ordre premier p appartenant à une variété algébrique V à trois dimensions et soient T la transformation birationnelle de V en elle-même génératrice de l'involution; A un point uni isolé de cette involution. Dans la gerbe des tangentes à la variété V au point A, T détermine une homographie cyclique. Le point A est dit point uni de première espèce ou point uni parfait si cette homographie est l'identité; point uni de seconde espèce si cette homographie est homologique; point uni de troisième espèce si elle n'est pas une homologie [1].

Supposons que le point A soit uni de seconde espèce et soit V^* une transformée birationnelle de V sur laquelle au point A correspond une surface (exceptionnelle) φ. A T correspond une transformation birationnelle T^* de V^* en elle-même, engendrant une involution I_p^*. La surface φ est transformée en elle-même par T^* et sur cette surface se trouvent un point uni isolé A^* et une courbe a^* ne passant pas par A^* dont tous les points sont unis pour l'involution I_p^*. Dans ce travail nous étudions le cas où

[1] Sur les variétés algébriques à trois dimensions de genres un contenant des involutions cycliques (*Conférences de la Réunion internationale des Mathématiciens*, Soc. Math. de France, 1938); Recherches sur les involutions cycliques du troisième ordre appartenant à une variété algébrique à trois dimensions (*Annales de l'École normale supérieure*, 1937, pp. 55-79); Sur deux involutions cycliques du troisième ordre appartenant à une variété algébrique à trois dimensions (*Bulletin des Sciences mathématiques*, 1937, pp. 82-96).

soit le point uni A^*, soient les points de la courbe a^*, sont unis parfaits (unis de première espèce) pour l'involution I_p^*. Nous construisons une variété algébrique Ω, image de l'involution I_p et par suite de l'involution I_p^*, telle qu'au point uni A envisagé corresponde un point de diramation isolé A'; nous déterminons la singularité du point A' pour la variété Ω.

Nous démontrons que si le point A^* est uni parfait pour I_p^*, le point A' est multiple d'ordre $\frac{1}{4}(p^2+4p-1)$ pour Ω', le cône tangent à cette variété en ce point étant composé d'un cône rationnel d'ordre $\frac{1}{4}(p-1)^2$ et d'un cône rationnel d'ordre $\frac{1}{2}(3p-1)$, lieu de ∞^1 plans, ces deux cônes ayant en commun un cône (à deux dimensions) d'ordre $\frac{1}{2}(p-1)$.

Si les points de la courbe a^* sont unis parfaits pour l'involution I_p^*, le point A' est multiple d'ordre $\frac{1}{2}(p^2+1)$ pour la variété Ω; le cône tangent en ce point à cette variété se composant d'un espace linéaire à trois dimensions et d'un cône rationnel d'ordre $\frac{1}{2}(p^2-1)$ rencontrant l'espace précédent suivant un plan.

Nous aurons à utiliser nos recherches sur les involutions n'ayant qu'un nombre fini de points unis, appartenant à une surface algébrique [1]; nous les supposerons connues du lecteur.

1. Soit V une variété algébrique à trois dimensions, d'irrégularité superficielle nulle, contenant une involution cyclique I_p, d'ordre premier p, n'ayant qu'un nombre fini de points unis.

---

(1) Recherches sur les involutions douées d'un nombre fini de points de coïncidence, appartenant à une surface algébrique (*Bulletin de la Société Mathématique de France*, 1919, pp. 1-16); Recherches sur les involutions cycliques appartenant à une surface algébrique (*Bulletin de l'Académie royale de Belgique*, 1930, pp. 450-467; 1931, pp. 1131-1150, 1356-1364; 1935, pp. 338-444; 1938, pp. 255-258); *Les involutions cycliques appartenant à une surface algébrique* (Paris, Hermann, 1935).

Nous avons montré que l'on peut construire sur V un système linéaire complet de surfaces $|F|$ contenant p systèmes linéaires partiels $|F_1|$, $|F_2|$, ..., $|F_p|$, composés au moyen de l'involution I_p et dont l'un, par exemple $|F_1|$, est privé de points-base. Si r est la dimension du système $|F|$, nous pouvons de plus supposer que V est une variété normale de l'espace S_r, dont les sections hyperplanes sont les surfaces F. La transformation birationnelle T de V en elle-même, génératrice de l'involution I_p, est alors une homographie de période p de S_r. L'homographie T possède p axes ponctuels (espaces linéaires dont tous les points sont unis) $S^{(1)}$, $S^{(2)}$, ..., $S^{(p)}$. Soient r_1, r_2, ..., r_p les dimensions de ces espaces. Désignons par Σ_i le système linéaire formé par les hyperplans (unis) passant par les axes de T, sauf par $S^{(i)}$. Les hyperplans de Σ_i découpent sur V les surfaces du système $|F_i|$ et ce système a par suite la dimension r_i.

Le système $|F_1|$ étant dépourvu de points-base, les axes $S^{(2)}$, $S^{(3)}$, ..., $S^{(p)}$ de T ne peuvent rencontrer la variété V. Les points unis de l'involution I_p sont donc les points, en nombre fini, communs à V et à $S^{(1)}$.

Rapportons projectivement les hyperplans de Σ_1 aux hyperplans d'un espace linéaire à r_1 dimensions. A la variété V correspond une variété Ω, image de l'involution I_p. Cette variété est normale et nous désignerons par Φ_1 ses sections hyperplanes; le système $|\Phi_1|$ a pour homologue $|F_1|$ dans la correspondance (1, p) existant entre Ω et V.

Aux systèmes de surfaces $|F_2|$, $|F_3|$, ..., $|F_p|$ de V correspondent sur Ω des systèmes linéaires complets que nous désignerons respectivement par $|\Phi_2|$, $|\Phi_3|$, ..., $|\Phi_p|$.

2. Soit A un point uni isolé de l'involution I_p, c'est-à-dire un point simple de V, appartenant à l'espace $S^{(1)}$ et tel qu'aucune tangente à V en A n'appartienne à cet espace.

L'espace linéaire à trois dimensions α, tangent à V en A, n'a donc que ce point en commun avec $S^{(1)}$.

L'espace tangent α est uni pour l'homographie T et dans la gerbe de droites de sommet A de cet espace, celle-ci détermine l'identité, ou une homologie ou une homographie non homologique. Nous nous placerons dans la seconde hypothèse; suivant notre terminologie, A est donc un point uni de seconde espèce.

Soient, dans l'espace α, α_2 le plan de l'homologie déterminée par T dans la gerbe de centre A, a_3 l'axe de cette homologie. Le plan α_2 et la droite a_3 rencontrent l'un ou l'autre des espaces $S^{(2)}$, $S^{(3)}$, ..., $S^{(p)}$. Pour fixer les idées, nous supposerons que le plan α_2 rencontre $S^{(2)}$ suivant une droite a_2 et que la droite a_3 rencontre $S^{(3)}$ en un point A_3. L'homographie T détermine alors dans l'espace α une homographie axiale hyperbolique d'axe ponctuel a_2 et dont les points unis sont A et A_3.

Soit S^* un hyperplan de Σ_1 ne passant pas par A. Projetons V à partir de A sur S^*; nous obtenons ainsi une variété V^*, birationnellement identique à V, transformée en elle-même par T et contenant le point A_3 et la droite a_2. Sur V^*, T engendre une involution I_p^*, birationnellement identique à I_p, possédant comme points unis le point A_3 et tous les points de a_2.

Dans ce qui va suivre, nous nous placerons dans l'une des hypothèses suivantes :

1° Le point A_3 est uni parfait pour I_p , c'est-à-dire que dans la gerbe des tangentes à V^* en A_3, T détermine l'identité;

2° Les points de la droite a_2 sont unis parfaits pour I_p^*.

Nous nous placerons tout d'abord dans la seconde hypothèse.

3. Un hyperplan de Σ_2 coupe l'espace α tangent à V en A suivant un plan α_3 passant par a_3 et coupant le plan α_2 suivant une droite a_2'. Cet hyperplan découpe, sur V, une surface F_2 ayant un point simple en A et touchant le plan α_3 en ce point.

Les surfaces F découpent, sur cette surface F_2, un système linéaire de courbes $|(F, F_2)|$ complet, puisque la variété V est d'irrégularité superficielle nulle [1]. Ce système contient p systèmes linéaires partiels composés au moyen de l'involution d'ordre p formée par les groupes de I_p appartenant à la surface F_2. L'un de ces systèmes, $|(F_1, F_2)|$, est dépourvu de points-base.

L'involution déterminée par I_p sur la surface F_2 est cyclique et possède comme point uni le point A. A ce point est infiniment voisin, par hypothèse, un point uni parfait situé sur la droite a_2. Nous avons établi (*Recherches*, 1^re^ note) que les courbes (F_1, F_2) passant par A acquièrent en ce point la multiplicité $\nu+1$, ν étant donné par $p=2\nu+1$. De plus, ces courbes possèdent un point multiple d'ordre ν, infiniment voisin de A sur la droite a_2' et une suite de ν points simples fixes, situés sur une branche tangente à la droite a_3. Ces ν points sont unis et le dernier est uni parfait pour l'involution déterminée par I_p sur F_2.

Désignons par F_1' les surfaces F_1 passant par A. Ces surfaces rencontrent la surface F_2 considérée suivant des courbes ayant un point multiple d'ordre $\nu+1$ en A, un point multiple d'ordre ν infiniment voisin de A sur a_2' et ν points simples fixes, infiniment voisins successifs de A, le premier se trouvant sur a_3. En faisant varier la surface F_2 dans le système $|F_2|$, on en conclut que les surfaces F_1' ont la multiplicité $\nu+1$ en A; elles ont en commun une droite infiniment petite r située dans le plan α_2 et infiniment voisine de A. Le cône tangent à une surface F_1' en A comprend le plan α_2 compté ν fois et est complété par un plan, variable avec la surface, passant par la droite a_3.

[1] Cfr. SEVERI, Fondamenti per la Geometria sulle varietà algebriche (*Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo*, 1909, t. XXVIII), n° 17

Appelons γ l'élément de courbe d'origine A, tracé sur une surface F_2 et formé des γ points infiniment voisins successifs de A, unis pour I_p, appartenant à toutes les surfaces F_1'. Une seconde surface F_2, non tangente à la première en A, la rencontre suivant une courbe unie pour T, ayant un point simple en A et qui nécessairement comprend l'élément γ. Il en résulte que toutes les surfaces F_1' contiennent γ. En outre, le ν-ième point situé sur γ, que nous désignerons par A_0, est uni parfait pour I_p.

4. Désignons par A' le point de diramation de Ω homologue de A. Aux points infiniment voisins de A_0 sur V correspondent les points d'une surface infiniment petite, infiniment voisine de A', et aux points de V infiniment voisins de la droite r correspondent les points d'une seconde surface analogue. Pour simplifier l'étude de ces surfaces, projetons la variété Ω à partir de A' sur un hyperplan ne passant pas par A'; nous obtenons ainsi une variété Ω', projectivement identique à celle que l'on obtiendrait en rapportant projectivement les surfaces F_1' aux hyperplans d'un espace linéaire à $r_1 - 1$ dimensions. Sur la variété Ω', les surfaces infiniment petites dont il vient d'être question ont pour homologues des surfaces au sens ordinaire du mot. Nous désignerons par φ la surface de Ω' qui correspond au domaine du point A_0, par ψ celle qui correspond au domaine de la droite r.

Nous avons établi (*Recherches*, 1re note) qu'une surface Φ_2 possède, au point A', un point multiple d'ordre $\nu+1$, le cône tangent se décomposant en un cône rationnel d'ordre ν et en un plan rencontrant le cône suivant une droite. D'une manière précise, si F_2 est la surface homologue de Φ_2, aux points de F_2 infiniment voisins de A_0 correspondent les points de Φ_2 infiniment voisins de A' situés dans le plan tangent, et aux points de F_2 infiniment voisins du point où cette surface rencontre la droite r correspondent les points de Φ_2 infiniment voisins de A' situés sur le cône d'ordre ν tangent. La projection d'une surface Φ_2 à partir de A' sur la variété Ω' rencontre donc la surface φ suivant une droite φ_1 et la surface ψ suivant une courbe rationnelle ψ_1 d'ordre ν. La droite φ_1 et la courbe ψ_1 se rencontrent en un point.

Deux surfaces F_2 ont en commun une courbe passant simplement par A, contenant γ et un point variable du domaine de A_0. D'autre part, on peut supposer, en remplaçant éventuellement $|F|$ par un de ses multiples convenablement choisi, $r_2 \geq 2$. Il en résulte que la surface φ contient ∞^2 droites φ_1 et est donc un plan.

5. Un hyperplan de Σ_3 coupe l'espace α suivant le plan α_2 et la variété V suivant une surface F_3 ayant en A un point simple, le plan tangent étant α_2. Les groupes de I_p situés sur une surface F_3 forment une involution cyclique ayant A comme point uni parfait. Il en résulte que les surfaces F'_1 coupent F_3 suivant des courbes ayant en A la multiplicité p et des tangentes variables.

Les surfaces Φ_3 ont en A' un point multiple d'ordre p à cône tangent rationnel. Les projections des surfaces Φ_3 à partir de A' sur Ω' rencontrent donc la surface ψ suivant des courbes rationnelles d'ordre p, ψ_2.

Une surface F_2 et une surface F_3 ont en commun une courbe ayant un point simple en A. Par conséquent, une courbe ψ_1 et une courbe ψ_2 sont unisécantes. Les courbes ψ_1 et ψ_2 forment donc nécessairement des faisceaux.

6. Le système de surfaces $|(\nu+1)F|$ est transformé en lui-même par T. Il contient un système linéaire partiel privé de points-base et composé au moyen de l'involution I_p; ce système contient les surfaces formées de $\nu+1$ surfaces F_1. Considérons celles des surfaces de ce système passant par le point uni A. Parmi ces surfaces, on trouve les surfaces formées de ν surfaces F_1 ne passant pas par A et d'une surface F'_1. Les surfaces considérées se comportent donc en A comme les surfaces F'_1. Une surface formée d'une surface F_2 et de ν surfaces F_3 se comporte également en A comme les surfaces F'_1; elles font, par conséquent, partie du système considéré. Il en résulte que si nous désignons par Φ'_1 la surface homologue d'une surface F'_1 sur la variété Ω, la projection à partir de A' d'une surface Φ'_1 sur la variété Ω' rencontre la surface ψ suivant une courbe d'ordre $\nu\,(p+1)$ équivalente à ν courbes ψ_2 et à une courbe ψ_1. Cette courbe, que nous désignerons par ψ_0, rencontre en un point le plan φ. Le lieu de ce point, lorsque la surface F'_1 varie, est une droite, puisque ce lieu est rencontré en un point par toute section hyperplane de Ω'.

De tout ceci, on conclut que

Le point de diramation A' de la variété Ω est multiple d'ordre $\nu\,(p+1)+1$ pour cette variété. Le cône (à trois dimensions) *tangent en A' à Ω se compose d'un espace à trois dimensions* (projetant le plan φ) *et d'un cône rationnel d'ordre $\nu\,(p+1)$* (projetant la surface ψ) *rencontrant l'espace suivant un plan.*

7. Passons maintenant à l'autre hypothèse, où le point A_3 est uni parfait pour l'involution I_p^*, c'est-à-dire où le point A_0, infiniment voisin de A sur la droite a_3, est uni parfait pour l'involution I_p. Nous poserons encore $p=2\nu+1$.

Considérons un hyperplan de Σ_2, coupant l'espace α, tangent en A à V, suivant un plan α_3 passant par a_3 et rencontrant le plan α_2 suivant une droite a'_2. Cet hyperplan coupe V suivant une surface F_2 touchant le plan α_3 en A, point simple de cette surface.

Les surface F'_1 coupent la surface F_2 suivant des courbes ayant la multiplicité $\nu+1$ en A, la multiplicité ν au point A_0 et passant par une suite de ν points simples infiniment voisins successifs de A, le premier étant sur la droite a'_2 et le dernier étant uni parfait pour l'involution d'ordre p déterminée par I_p sur la surface F_2.

En faisant varier la surface F_2 dans le système $|F_2|$, on en conclut que les surfaces F'_1 ont la multiplicité $\nu+1$ en A. Le cône tangent en A à une surface F'_1 possède la droite a_3 comme droite multiple d'ordre ν et il contient, d'autre part, le plan α_2; il se décompose donc en $\nu+1$ plans : le plan α_2 et ν plans passant par a_3.

Observons, en outre, que les nappes des surfaces F'_1, tangentes en A au plan α_2, ont entre elles un contact d'ordre ν.

8. Considérons maintenant une surface F_3. Elle a un point simple en A et touche le plan α_2 en ce point. L'involution cyclique déterminée par I_p sur cette surface a A comme point uni parfait. Par conséquent, les surfaces F'_1 découpent sur la surface F_3 des courbes ayant en A un point multiple d'ordre p à tangentes variables.

Une surface F_2 et une surface F_3 ont en commun une courbe ayant un point simple en A et y touchant la droite a'_2 commune au plan α_2 et au plan α_3 tangent à F_2 en A. Cette courbe doit être rencontrée par les surfaces F'_1 en p points au moins confondus en A. Il en résulte que la courbe passe par la série des ν points unis pour I_p, infiniment voisins successifs de A, dont il a été question plus haut. Par suite, les surfaces F_3 et F'_1 ont un contact d'ordre ν en A.

Le cône tangent à une surface F'_1 en A, se composant du plan α_2 et de ν plans passant par a_3, a ν droites doubles dans le plan α_2. Cette surface F'_1 coupe une surface F_3 suivant une courbe tangente à ces ν droites doubles en A et ayant encore en ce point $\nu+1$ autres tangentes, puisque les deux surfaces ont en A un contact d'ordre ν.

Les surfaces F'_1 et F_3 ont en commun un élément superficiel σ d'origine A, comportant des domaines de points unis pour I_p d'ordres un, deux, ..., ν. Les points du dernier domaine sont unis parfaits par l'involution I_p.

9. Soit A' le point de diramation homologue du point uni A sur la variété Ω. Pour étudier la singularité de Ω en A', projetons encore cette variété à partir de A' sur un hyperplan ne passant pas par A' et soit Ω' la variété obtenue.

Aux points de V infiniment voisins de A_0 correspondent sur Ω' les points d'une surface rationnelle φ, et aux points de V infiniment voisins des points du domaine d'ordre ν de l'élément superficiel σ correspondent les points d'une surface ψ.

Une surface Φ_2 possède en A' la multiplicité $\nu+1$, le cône tangent étant formé d'un plan et d'un cône rationnel d'ordre ν rencontrant le plan suivant une droite. Les points du cône infiniment voisins de A' correspondent aux points de la surface F_2 homologues de Φ_2 infiniment voisins de A_0 et les points du domaine de A' situés sur le plan tangent correspondent aux points de F_2 infiniment voisins du ν^e point uni de I_p situé sur l'élément superficiel σ. La projection de Φ_2 à partir de A' sur la variété Ω' rencontre donc la surface φ suivant une courbe rationnelle φ_ν d'ordre ν et la surface ψ suivant une droite ψ_1. La courbe φ_ν et la droite ψ_1 ont un point commun.

Les dimensions r_1, r_2 de $|F_1|$, $|F_2|$ pouvant être choisies aussi grandes qu'on le veut; la surface φ contient des courbes φ_ν en nombre aussi grand que possible. Il en résulte que la surface φ peut être obtenue en rapportant projectivement aux hyperplans d'un espace linéaire à $\frac{1}{2}\nu(\nu+3)$ dimensions les courbes d'ordre ν d'un plan. Les courbes φ_ν correspondent alors aux droites de ce plan et la surface φ est d'ordre ν^2. Nous retrouverons d'ailleurs plus loin ce dernier résultat.

Une surface Φ_3 possède en A' un point multiple d'ordre p à cône tangent irréductible rationnel. Par conséquent, la projection d'une surface Φ_3 à partir de A' sur Ω' rencontre la surface ψ suivant des courbes rationnelles irréductibles d'ordre p, ψ_p.

La surface ψ est donc une surface réglée. Comme une surface F_2 et une surface F_3 ont en commun une courbe ayant un point simple en A, les droites ψ_1 rencontrent une courbe ψ_p en un point.

10. Considérons, comme dans le premier cas, le système $|(\nu+1)F|$ et, dans le système composé au moyen de I_p et dépourvu de points-base qu'il contient, les surfaces passant par A. Parmi ces surfaces se trouvent, d'une part, les surfaces formées de ν surfaces F_1 ne passant pas par A et d'une surface F'_1; d'autre part, les surfaces formées de ν surfaces F_2 et d'une surface F_3. Si nous désignons par Φ_1 les sections hyperplanes de Ω passant par A', surfaces homologues des surfaces F'_1, et si nous projetons ces surfaces à partir de A' sur Ω', nous voyons donc que les surfaces obtenues, c'est-à-dire les sections hyperplanes de Ω', rencontrent la surface φ suivant une courbe équivalente à ν courbes φ_ν et la surface ψ suivant une courbe équivalente à ν droites ψ_1 et à une courbe ψ_p. Nous retrouvons donc que la surface φ est d'ordre ν^2. La surface réglée ψ est d'ordre $p+\nu$.

Observons que les droites ψ_1 rencontrent en un point la surface φ. Les courbes d'ordre ν^2 tracées sur φ et les courbes d'ordre $p+\nu$ tracées sur ψ que l'on vient de rencontrer se coupent donc en ν points. Le lieu de ces points est une courbe d'ordre ν et la surface réglée ψ a donc comme directives une courbe d'ordre ν et une courbe ψ_p d'ordre p. La courbe d'ordre ν que l'on vient de rencontrer est évidemment rationnelle et il en est de même de la surface ψ.

Par conséquent :

Le point de diramation A' de la variété Ω est multiple d'ordre $p+\nu$ $(\nu+1)$ pour cette variété. Le cône (à trois dimensions) *tangent en* A' *à* Ω *se compose d'un cône rationnel d'ordre* ν^2 *et d'un cône rationnel d'ordre* $p+\nu$ *lieu de* ∞^1 *plans. Ces deux cônes ont en commun un cône* (à deux dimensions) *d'ordre* ν.

11. Dans le cas $p=3$, $\nu=1$, les deux hypothèses coïncident et l'on obtient l'énoncé suivant :

Le point de diramation d'une variété Ω *image d'une involution du troisième ordre, cyclique, appartenant à une variété algébrique* V *à trois dimensions et correspondant à un point uni de seconde espèce, est multiple d'ordre cinq pour la variété* Ω. *Le cône* (à trois dimensions) *tangent en ce point à la variété* Ω *se compose d'un espace à trois dimensions et d'un cône du quatrième ordre lieu de* ∞^1 *plans, ayant un plan en commun avec l'espace.*

Actuellement, la surface φ est un plan et la surface ψ une réglée du quatrième ordre ayant comme directrices une cubique gauche et une droite appartenant au plan φ. L'énoncé précédent rectifie celui que nous avions obtenu autrefois (1); au cône tangent rencontré dans notre note citée, il faut ajouter l'espace à trois dimensions dont il est question ci-dessus.

Dans le cas $p=3$, deux surfaces F_1' ont en commun une courbe ayant un point quintuple en A, une des tangentes en ce point coïncidant avec a_3 et les autres se trouvant dans le plan α_2.

Liége, le 20 mai 1938.

---

(1) Sur les involutions cycliques appartenant à une variété algébrique à trois dimensions (*Bulletin de l'Académie royale de Belgique*, 1931, pp. 29-39). On remarquera que dans nos travaux ultérieurs sur les involutions cycliques du troisième ordre appartenant à une variété algébrique à trois dimensions, nous n'avons pas eu à utiliser la multiplicité des points de diramation.