Recherches sur la structure des points de diramation d'une surface algébrique multiple (septième note)

Lucien Godeaux

Résumé
Exposé d'une méthode pour déterminer la structure d'un point de diramation de troisième catégorie. Application à une involution cyclique d'ordre 839.

GÉOMÉTRIE ALGÉBRIQUE

Recherches sur la structure des points de diramation d'une surface algébrique multiple

par LUCIEN GODEAUX,
Membre de l'Académie

(Septième note)

Résumé. — Exposé d'une méthode pour déterminer la structure d'un point de diramation de troisième catégorie. Application à une involution cyclique d'ordre 839.

Pour clôturer nos recherches sur la structure des points de diramation d'une surface multiple (1), nous exposons une méthode qui permet de déterminer rapidement cette structure. Nous appliquons ensuite cette méthode au cas d'une surface multiple d'ordre 839.

1. Soit F une surface algébrique normale dans un espace S_r à r dimensions contenant une involution cyclique I d'ordre premier p, déterminée sur la surface par une homographie H_0 de période p possédant p axes ponctuels $\xi^0, \xi^1, \ldots, \xi^{p-1}$ dont le premier seul rencontre la surface en un nombre fini de points: les points unis de l'involution, simples pour la surface.

Désignons par C les sections de F par les hyperplans passant par les espaces $\xi^1, \xi^2, \ldots, \xi^{p-1}$, par r_0 la dimension du système $|C|$. En rapportant projectivement les courbes C_0 aux hyperplans d'un espace S' à r_0 dimensions, il correspond aux groupes de I les points d'une surface normale Φ, image de l'involution.

Soit O un point uni de l'involution et O' le point de diramation qui lui correspond sur Φ. Nous désignerons par Γ les sections hyper-

(1) Les notes précédentes ont paru dans le Bulletin de l'Académie roy. de Belgique. 1972, pp. 6-22, 158-170, 171-179, 1299-1306; 1973, pp. 125-133, 293-302.

planes de Φ, par C^1 les courbes C passant par O et par Γ^1 les courbes qui leur correspondent sur Φ.

Supposons que le point O soit un point uni de seconde espèce et de troisième catégorie. Soient α, β les nombres qui lui sont attachés ($\alpha\beta - 1$ multiple de p). Désignons par λ_1, μ_1 les solutions des congruences

$$\lambda + \alpha\mu \equiv 0, \mu + \beta\lambda \equiv 0 \qquad (\text{mod. p}) \quad (1)$$

telle que $\lambda_1 + \mu_1$ soit minimum, les nombres λ_1, μ_1 étant des entiers positifs.

Par hypothèse on a

$$\lambda_1 + \alpha\mu_1 = hp, \mu_1 + \beta\lambda_1 \equiv 0. \quad (h > 1, h' > 1)$$

Sur la surface F, le point O est l'origine de deux branches linéaires contenant les points

$$(\alpha,1),(\alpha,2),\ldots,(\alpha,\beta - 1)$$

et

$$(\beta,1),(\beta,2),\ldots,(\beta,\alpha - 1)$$

infiniment voisins successifs de O, et de deux branches superlinéaires

$$(\alpha,1),(\alpha,2),\ldots,(\alpha,x),(\alpha,x + 1),(\alpha,x + 1,1),\ldots,P$$

et

$$(\beta,1),(\beta,2),\ldots,(\beta,x'),(\beta,x' + 1),(\beta,x' + 1,1),\ldots,P'$$

également infiniment voisins successifs de O.

Ces points sont unis de seconde espèce pour l'involution I sauf les points $(\alpha,\beta - 1),(\beta,\alpha - 1)$, P, P' qui sont unis de première espèce.

Désignons par Φ_1 la projection de la surface Φ à partir de O' sur un hyperplan de l'espace ambiant. Aux domaines des points $(\alpha,\beta - 1)$, P, P', $(\beta, \alpha - 1)$ correspondent sur Φ_1 des courbes rationnelles σ_α, τ_1, τ_2, σ_β. Chacune de ces courbes rencontre la suivante et la précédente en un point, mais ne rencontre pas les autres. On peut d'ailleurs prendre r_0 et par suite r assez grands pour que ces courbes soient normales.

2. Les courbes C^1 passent $\lambda_1 + \mu_1$ fois par O, λ_1 fois par $(\alpha,1)$, $(\alpha,2)$, ..., (α,x), y fois par $(\alpha, x + 1)$, un certain nombre de fois λ_1'

par les points $(\alpha, x+2), \ldots, (\alpha, \beta-1)$, un certain nombre de fois par $(\alpha, x+1, 1)$ et par les points qui lui font suite et aboutissant à P, multiple d'ordre m pour les courbes C^1.

Soit O_0' le point commun aux courbes τ_1, τ_2 sur la surface Φ_1. Les sections de cette surface par les hyperplans ayant en O_0' un contact d'ordre $m-1$ avec la courbe τ_1 rencontrent encore la courbe σ_α en λ_1' points mais ne rencontrent plus la courbe τ_1 en des points variables. A ces courbes correspondent sur F des courbes C^1 passant λ_1' fois par les points $(\alpha,1), \ldots, (\alpha, \beta-1$ mais ne passant plus par P.

Posons

$$p = a\beta + b. \quad (b < \beta)$$

Les courbes C^1 qui correspondent à la solution $\lambda = a, \mu = b$ des congruences (1) passent $a+b$ fois par O et a fois par les points $(\alpha,1), \ldots, (\alpha, \beta-1)$. Or, dans le système $| C^1 |$, il ne peut exister qu'un seul système partiel de courbes passant le même nombre de fois par les points $(\alpha,1), \ldots, (\alpha, \beta-1)$. Les deux systèmes partiels qui viennent d'être rencontrés doivent donc coïncider et on a $\lambda_1' = a$.

Comme on l'a vu dans les notes précédentes, on a

$$\lambda_1 - y = \mathrm{H}m, y - a = \mathrm{H}'m,$$

les entiers positifs H, H' étant premiers entre eux. On en déduit

$$\lambda_1 - a = (\mathrm{H} + \mathrm{H}')m.$$

On a $\lambda_1 > a$ et d'autre part $\lambda_1 + \mu_1 < a + b$, donc $b \gg \mu_1$.

3. Les courbes C^1 passent $\lambda_1 + \mu_1$ fois par O et μ_1 fois par les points $(\beta,1), (\beta,2), \ldots, (\beta,x')$, y' fois par $(\beta, x'+1)$, un certain nombre de fois μ_1' par $(\beta, x'+2), \ldots, (\beta, \alpha-1)$, un certain nombre de fois par $(\beta, x'+1, 1)$ et par une suite de points successifs aboutissant au point P', multiple d'ordre m' pour les courbes C^1.

Dans l'espace S', les hyperplans ayant un contact d'ordre $m'-1$ avec la courbe τ_2 en O_0' rencontrent la courbe σ_β en μ_1' points mais ne rencontrent plus τ_2 en des points variables. Les courbes C^1 qui leur correspondent passent μ_1' fois par les points $(\beta,1), \ldots, (\beta, \alpha-1)$ mais ne passent plus par les points P'.

Posons

$$p = b'\alpha + a'. \quad (a' < \alpha)$$

Les courbes C^1 qui correspondent à la solution $\lambda = a', \mu = b'$ des congruences (1) passent $a' + b'$ fois par O et b' fois par les points $(\beta,1), \ldots, (\beta, \alpha - 1)$, mais ne passent pas par les points $(\beta, x' = 1, 1)$, ..., P'. Les deux systèmes que l'on vient de rencontrer dans le système $| C^1 |$ doivent coïncider et on a $\mu'_1 = b'$.

Nous avons

$$\mu_1 - y' = Km', y' - b' = Km',$$

K et K' étant des entiers positifs premiers entre eux. On a donc

$$\mu_1 - b' = (K + K')m'.$$

On a $\mu_1 > b'$ et comme $a' + b' > \lambda_1 + \mu_1$, on a $a' > \lambda_1$.

4. La somme des multiplicités des courbes C^1 aux points O, $(\alpha,1)$, ..., $(\alpha, \beta - 1)$ doit être égal à p. On a donc

$$\lambda_1 + \mu_1 + x\lambda_1 + y + (\beta - x - z)a = p = a\beta + b,$$

c'est-à-dire, en remplaçant λ_1 et y par leurs valeurs,

$$(x + 1)(H + H')m + H'm = b - \mu_1.$$

Comparons cette relation à la relation trouvée plus haut,

$$\lambda_1 - a = (H + H')m.$$

Le nombre m divise $\lambda_1 - a$ et $b - \mu_1$. D'autre part, H et H' sont premiers entre eux donc aussi H + H' et H'. Cela n'est possible que si m est le plus grand commun diviseur de $\lambda_1 - a$ et de $b - \mu_1$.

On a de même

$$(x' + 1)(K + K')m' + K'm' = a' - \lambda_1,$$

de sorte que m' divise $a' - \lambda_1$ mais aussi comme on l'a vu tantôt, $\mu_1 - b'$. Puisque K et K' sont premiers entre eux, m' doit être le plus grand commun diviseur de $\lambda_1 - a$ et $b' - \mu_1$.

5. Nous allons maintenant appliquer ce qui précède à la détermination de la structure d'un point de diramation O' correspondant à une involution cyclique d'ordre $p = 839$, le point O correspondant

à la valeur $\alpha = 249$ (¹). On en déduit $\beta = 155$, $\alpha\beta - 1 = 46p$ et $\lambda_1 = 27$, $\mu_1 = 10$.

De $p = a\beta + b$, on déduit $a = 5$, $b = 64$.

De $p = b'\alpha + a'$, on tire $a' = 98$, $b' = 3$.

m est le plus grand commun diviseur de $\lambda_1 - a = 22$, $b - \mu_1 = 54$, donc $m = 2$.

m' est le plus grand commun diviseur de $\mu_1 - b' = 7$ et de $a' - \lambda_1 = 65$, donc $m' = 1$.

De $\lambda_1 - a = (\mathrm{H} + \mathrm{H}')m$, on déduit $\mathrm{H} + \mathrm{H}' = 11$.

De $(x + 1)(\mathrm{H} + \mathrm{H}')m + \mathrm{H}'m = b - \mu_1$, on déduit

$$11(x + 1) + \mathrm{H}' = 27.$$

H′ doit être tel que $27 - \mathrm{H}'$ soit multiple de 11, d'où $\mathrm{H}' = 5$, $x = 1$ et $\mathrm{H} = 6$.

De $\mu_1 - b' = (\mathrm{K} + \mathrm{K}')m'$, on déduit $\mathrm{K} + \mathrm{K}' = 7$. On a ensuite

$$(x' + 1)(\mathrm{K} + \mathrm{K}')m' + \mathrm{K}'m' = a - \lambda_1,$$

c'est-à-dire

$$7(x' + 1) + \mathrm{K}' = 65.$$

K′ doit donc être choisi tel que $65 - \mathrm{K}'$ soit divisible par 7 et on doit avoir $\mathrm{K}' < 7$. On a donc $\mathrm{K}' = 2$, $x' = 8$ et $\mathrm{K} = 5$.

La structure des courbes C^1 au point O peut donc être représentée par le schéma suivant:

$$\begin{array}{lll}
 & (\alpha,2,2)^2,(\alpha,2,2,1)^2,(\alpha,2,2,2)^2,(\alpha,2,2,3)^2,(\alpha,2,2,4)^2. & \\
 & (\alpha,2,1)^{10} & \\
\multicolumn{3}{l}{\mathrm{O}^{37},(\alpha,1)^{27},(\alpha,2)^{15},(\alpha,3)^5,\ldots,(\alpha,154)^5.} \\
(\beta,1)^{10} & & \\
\vdots & & \\
(\beta,8)^{10} & & \\
\multicolumn{3}{l}{(\beta,9)^5,(\beta,9,1)^2,(\beta,9,2)^2,(\beta,9,3)^1,} \\
\vdots & & \qquad (\beta,9,3,1)^1. \\
(\beta,248)^3, & &
\end{array}$$

(¹) Cet exemple a fait l'objet d'une note de nos élèves, M. R. Thonet, *Sur la structure de trois points de diramation de surfaces multiples* (Bulletin de l'Académie roy. de Belgique, 1956, pp. 328-355). La méthode utilisée par M. Thonet est évidemment différente de celle employée ici.

le signe $(\alpha,1)^{27}$ par exemple signifie que les courbes C^1 ont au point $(\alpha,1)$ la multiplicité 27.

Aux points $(\alpha,154)$, $(\alpha,2,2,4)$, $(\beta,9,3,1)$ et $(\beta,248)$ correspondent respectivement sur la surface Φ_1 des courbes σ_α d'ordre cinq, τ_1 d'ordre deux, τ_2 d'ordre un et σ_β d'ordre trois. Le cône tangent à Φ au point O s'obtient en projetant ces courbes de ce point. C3 cône est donc d'ordre onze.

Liège, le 22 janvier 1974.