Extrait du *Bulletin de l'Académie royale de Belgique* (Classe des Sciences).
(Séance du 17 octobre 1936, n° 10.)

Construction d'une surface algébrique de diviseur trois,

par LUCIEN GODEAUX, Correspondant de l'Académie.

On sait que M. Severi a introduit, sous le nom de diviseur d'une surface algébrique, un entier σ égal au nombre maximum des courbes algébriquement distinctes équisousmultiples d'une courbe de la surface (1).

Nous avons montré qu'une surface image d'une involution d'ordre premier p, privée de points unis, appartenant à une surface régulière, a un diviseur σ multiple de p et précisément le diviseur $\sigma = p$ si la surface support de l'involution a le diviseur $\sigma = 1$ (2). Cela nous a permis de construire quelques surfaces de diviseur $\sigma = 2$; dans cette note, nous construirons une surface de diviseur $\sigma = 3$, particulièrement simple. Précisément, nous établirons le théorème suivant :

Si $f_3(x_0, x_1, x_2, x_3)$ *désigne une forme cubique quaternaire, la surface du neuvième ordre, d'équation*

$$\begin{aligned} & x_1^2x_2^2x_3^2f_3(x_0, x_1, x_2, x_3) + x_0x_1x_2x_3(a_1x_1^3x_3^2 + a_2x_2^3x_1^2 + a_3x_3^3x_2^2) \\ & + b_1x_1^6x_3^3 + b_2x_2^6x_1^3 + b_3x_3^6x_2^3 \\ & + x_1x_2x_3(c_1x_2^3x_3^3 + c_2x_3^3x_1^3 + c_3x_1^3x_2^3 + d_1x_1^4x_3^2 + d_2x_2^4x_1^2 + d_3x_3^4x_2^2) = 0, \end{aligned}$$

a le diviseur $\sigma = 3$.

---

(1) Sulla totalità delle curve algebriche tracciate sopra une superficie algebrica (*Mathematische Annalen*, 1906, Bd. 62, pp. 194-225); La base minima pour la totalité des courbes tracées sur une surface algébrique (*Annales de l'École norm. sup.*, 1908, pp. 449-468); Complementi alla teoria della base per la totalità delle curve di una superficie algebrica (*Rend. R. Circolo matem. di Palermo*, 1910, t. 30, pp. 265-288).

(2) Sur certaines surfaces algébriques de diviseur supérieur à l'unité. (*Bull. de l'Acad. de Cracovie*, 1914, pp. 362-368.)

1. Considérons, dans l'espace linéaire S_{10}, la surface F représentée par les équations obtenues en égalant à zéro tous les mineurs de la matrice

$$\left\| \begin{matrix} X_{111} & X_{221} & X_{331} & X_{123} & X_{113} & X_{112} \\ X_{112} & X_{222} & X_{332} & X_{223} & X_{123} & X_{221} \\ X_{113} & X_{223} & X_{333} & X_{332} & X_{331} & X_{123} \end{matrix} \right\|$$

jointes à l'équation

$$\begin{aligned} X_0^3 + X_0^2 \varphi_1 (X_{112}, X_{223}, X_{331}) \\ + X_0 [\varphi_2 (X_{112}, X_{223}, X_{331}) + a_1 X_{111} X_{113} + a_2 X_{222} X_{221} + a_3 X_{333} X_{332}] \\ + \varphi_3 (X_{111}, X_{222}, X_{333}, X_{123}) = 0, \end{aligned}$$

les φ étant des formes dont le degré est indiqué par l'indice.

Considérons, d'autre part, l'homographie H de période trois

$$\frac{X'_{111}}{X_{111}} = \frac{X'_{222}}{X_{222}} = \frac{X'_{333}}{X_{333}} = \frac{X'_{123}}{X_{123}} = \rho,$$

$$\frac{X'_0}{\varepsilon X_0} = \frac{X'_{112}}{\varepsilon X_{112}} = \frac{X'_{223}}{\varepsilon X_{223}} = \frac{X'_{331}}{\varepsilon X_{331}} = \rho,$$

$$\frac{X'_{113}}{\varepsilon^2 X_{113}} = \frac{X'_{221}}{\varepsilon^2 X_{221}} = \frac{X'_{332}}{\varepsilon^2 X_{332}} = \rho,$$

où ε est une racine cubique primitive de l'unité. La surface F est transformée en elle-même par H et cette homographie détermine sur la surface une involution I_3 d'ordre trois. Il est facile de voir que les axes ponctuels de l'homographie H ne rencontrent pas F et que par suite l'involution I_3 est dépourvue de points unis.

2. Désignons par $|C|$ le système des sections hyperplanes de F. Ce système est transformé en lui-même par H et contient trois systèmes linéaires partiels composés au moyen de l'involution I_3, à savoir :

Le système $|C_1|$, découpé par les hyperplans

$$\lambda_1 X_{111} + \lambda_2 X_{222} + \lambda_3 X_{333} + \lambda_4 X_{123} = 0.$$

Le système $|C_2|$, découpé par les hyperplans

$$\lambda_0 X_0 + \lambda_1 X_{112} + \lambda_2 X_{223} + \lambda_3 X_{331} = 0;$$

Le système $|C_3|$, découpé par les hyperplans

$$\lambda_1 X_{113} + \lambda_2 X_{221} + \lambda_3 X_{332} = 0.$$

Pour obtenir un modèle projectif de la surface Φ image de l'involution I_3, rapportons projectivement les courbes C_2 aux plans d'un espace S_3. Pour abréger l'écriture, posons

$$x_0 = X_0, \quad x_1 = X_{112}, \quad x_2 = X_{223}, \quad x_3 = X_{331}.$$

La surface Φ a pour équation

$$\begin{aligned} & x_1^2 x_2^2 x_3^2 [x_0^3 + x^2 \varphi_1(x_1, x_2, x_3) + x_0 \varphi_2(x_1 x_2, x_3)] \\ & + x_0 x_1 x_2 x_3 (a_1 x_1^3 x_3^2 + a_2 x_2^3 x_1^2 + a_3 x_3^3 x_2^2) \\ & + \varphi_3(x_1^2 x_3, x_2^2 x_1, x_3^2 x_2, x_1 x_2 x_3) = 0, \end{aligned}$$

équation qui peut se mettre sous la forme

$$\begin{aligned} & x_1^2 x_2^2 x_3^2 f_3(x_0, x_1, x_2, x_3) \\ & + x_0 x_1 x_2 x_3 (a_1 x_1^3 x_3^2 + a_2 x_2^3 x_1^2 + a_3 x_3^3 x_2^2) + b_1 x_1^6 x_3^3 + b_2 x_2^6 x_1^3 + b_3 x_3^6 x_3^2 \\ & + x_1 x_2 x_3 (c_1 x_2^3 x_3^3 + c_2 x_3^3 x_1^3 + c_3 x_1^3 x_2^3 + d_1 x_1^4 x_3^2 + d_2 x_2^4 x_1^2 + d_3 x_3^4 x_2^2) = 0. \end{aligned}$$

La surface F est d'ordre 27 et la surface Φ d'ordre neuf.

La surface Φ possède un point sextuple en O_0 (1, 0, 0, 0) et passe triplement par chacune des droites $x_2 = x_3 = 0$, $x_3 = x_1 = 0$, $x_1 = x_2 = 0$. De plus, cette surface possède une droite triple infiniment voisine de la droite $x_2 = x_3 = 0$ dans le plan $x_3 = 0$, une droite triple infiniment voisine de la droite $x_3 = x_4 = 0$ dans le plan $x_1 = 0$, enfin une droite triple infiniment voisine de la droite $x_1 = x_2 = 0$ dans le plan $x_2 = 0$.

Les adjointes de la surface Φ sont formées des plans $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$ et des cônes du second ordre passant par les arêtes du trièdre formé par ces plans.

La surface Φ est, d'autre part, régulière et l'on a $p_a = p_g = 3$.

3. Désignons par $|\Gamma_1|$, $|\Gamma_2|$ et $|\Gamma_3|$ les systèmes linéaires de courbes qui correspondent sur Φ respectivement aux systèmes $|C_1|$, $|C_2|$, $|C_3|$. Les courbes Γ_2 sont les sections planes de Φ. L'involution I_3 étant dépourvue de points unis, on a

$$|3\Gamma_1| = |3\Gamma_2| = |3\Gamma_3|$$

et la surface Φ a le diviseur $\sigma = 3$.

Les courbes Γ_1 sont découpées sur la surface Φ, en dehors des droites multiples, par les surfaces

$$\lambda_1 x_1^2 x_3 + \lambda_2 x_2^2 x_1 + \lambda_3 x_3^2 x_2 + \lambda_4 x_1 x_2 x_3 = 0$$

et les courbes Γ_3 par les surfaces

$$\lambda_1 x_3 x_1 + \lambda_2 x_1 x_2 + \lambda_3 x_2 x_3 = 0.$$

Les courbes Γ_3 coïncident donc avec les courbes canoniques de la surface Φ; il en résulte que les courbes C sont les courbes canoniques de F et que, par suite, le genre linéaire de Φ est $p^{(1)} = 10$.

4. On observera que si l'on rapporte projectivement les courbes C_1 (ou Γ_1) aux plans d'un espace S_3, on obtient comme modèle projectif de la surface Φ une surface triple ayant comme support la surface cubique

$$X_{111} X_{222} X_{333} = X_{123}^3.$$

D'autre part, en rapportant projectivement aux droites d'un plan les courbes C_3 (ou Γ_3), on obtient comme modèle projectif de Φ un plan triple canonique.

Liége, le 12 septembre 1936.

M. Hayez, Imprimeur de l'Académie royale des Sciences, des Lettres et des Beaux-Arts de Belgique