Extrait du *Bulletin de l'Académie royale de Belgique* (Classe des Sciences).
Séance du 6 juin 1936, n° 6.

Sur une propriété de la première droite de Green d'une surface,

par LUCIEN GODEAUX, Correspondant de l'Académie.

Considérons, en un point x d'une surface (x), non réglée, les asymptotiques u, v et le plan tangent ξ. Projetons les asymptotiques d'un point quelconque de l'espace sur le plan ξ et prenons les coniques osculatrices en x aux courbes obtenues. Les pôles des tangentes aux asymptotiques u, v en x par rapport à ces deux coniques, distincts du point x, déterminent une droite appelée seconde droite (ou arête) de Green. La conjuguée de cette droite par rapport à la quadrique de Lie est la première droite de Green (1). Nous nous proposons de donner ici une nouvelle définition de la première droite de Green.

Il existe ∞^1 *transformations birationnelles involutives obtenues en rapportant projectivement aux plans de l'espace les quadriques ayant un contact du second ordre avec la surface* (x) *au point* x, *telles qu'aux points du domaine du troisième ordre du point* x *sur la surface* (x) *correspondent les points de la cubique intersection du plan tangent* ξ *avec les surfaces cubiques ayant un contact du quatrième ordre avec la surface* (x) *au point* x. *Ces transformations ont un point uni en dehors du plan* ξ*; le lieu de ce point uni est la première droite de Green attachée au point* x *de la surface* (x).

(1) Voir FUBINI et CECH, *Geometria proiettiva differenziale* (Bologne, 1926); *Introduction à la Géométrie projective différentielle des surfaces* (Paris, 1931).

1. — Soit (x) une surface non réglée, rapportée à ses asymptotiques u, v. Les coordonnées x_1, x_2, x_3, x_4 de Wilczynski du point x de la surface (x) satisfont au système complètement intégrable

$$x^{20} + 2b\,x^{01} + c_1 x = 0,$$
$$x^{02} + 2a x^{10} + c_2 x = 0,$$

où a, b, c_1, c_2 sont des fonctions analytiques de u, v, les deux premières n'étant pas identiquement nulles.

A un point x non parabolique de la surface (x), attachons le tétraèdre $x\ x^{10}\ x^{01}\ x^{11}$. Tout point de l'espace a des coordonnées de la forme

$$z_1 x + z_2 x^{10} + z_3 x^{01} + z_4 x^{11}$$

et nous dirons que z_1, z_2, z_3, z_4 sont les coordonnées locales de ce point.

L'équation locale des quadriques osculatrices à la surface (x) au point x est

$$\lambda_1 (z_1 z_4 - z_2 z_3) + \lambda_2 z_2 z_4 + \lambda_3 z_3 z_4 + \lambda_4 z_4^2 = 0. \tag{1}$$

Si l'on rapporte projectivement ces quadriques aux plans d'un espace, aux points du domaine du troisième ordre du point x sur la surface (x) correspondent, dans la transformation birationnelle ainsi déterminée, les points d'une cubique plane ayant un point double (1).

Les surfaces cubiques ayant au point x un contact du quatrième ordre avec la surface (x) ont été considérées par M. B. Segre (2) et M. Lane (3). Ces surfaces sont en nombre ∞^3 et passent toutes par la cubique plane γ

$$z_4 = 0, \quad 2(b z_2^3 + a z_3^3) + 3 z_2 z_3 \left[z_1 - \frac{1}{4} z_2 (\log b)^{10} - \frac{1}{4} z_3 (\log a)^{01} \right] = 0.$$

(1) Voir notre note « Sur les quadriques de Moutard ». (*Bull. de la Soc. roy. des Sc. de Liége*, 1933, pp. 100-104.)

(2) La cubique indicatrice de l'élément linéaire projectif d'une surface. (*C. R.*, 21 mars 1927.)

(3) The contact of a cubic surface with an analytic surface. (*Transactions of the Amer. Math. Society*, 1927, t. 29. pp. 471-480.)

La courbe γ, que M. B. Segre appelle la *cubique indicatrice de l'élément linéaire projectif* de la surface (x), possède un point double en x et touche en ce point les tangentes aux asymptotiques de la surface (x). Ses trois points d'inflexion sont situés sur la seconde droite de Green

$$4z_1 - z_2(\log b)^{10} - z_3(\log a)^{01} = 0, \qquad z_4 = 0.$$

Les droites projetant du point x les trois points d'inflexion sont les tangentes aux lignes de Darboux de la surface (x) au point x.

2. — Rapportons projectivement les quadriques (1) aux plans de l'espace de telle sorte que la transformation birationnelle ainsi obtenue soit involutive et qu'aux points du domaine du troisième ordre du point x sur la surface (x) correspondent les points de la courbe γ. On obtient ainsi une transformation T représentée par les équations

$$\begin{aligned}
\rho z_1' &= z_1 z_4 - z_2 z_3 + \frac{1}{4}\left[z_2(\log b)^{10} + z_3(\log a)^{01} + \mathrm{A} z_4\right] z_4,\\
\rho z_2' &= \left[z_2 - \frac{1}{2} z_4 (\log a)^{01}\right] z_4,\\
\rho z_3' &= \left[z_3 - \frac{1}{2} z_4 (\log b)^{10}\right] z_4,\\
\rho z_4' &= -z_4^2,
\end{aligned}$$

où A est quelconque.

Dans la gerbe de sommet x, la transformation T détermine une homologie ayant pour plan $z_4 = 0$ et pour axe la droite

$$\frac{z_2}{(\log a)^{01}} = \frac{z_3}{(\log b)^{10}} = \frac{z_4}{4}, \tag{2}$$

c'est-à-dire la première droite de Green du point x.

La transformation T possède un point uni

$$-\frac{1}{8}(\log a)^{01}(\log b)^{10} - \frac{1}{2}\mathrm{A}, \quad (\log a)^{01}, \quad (\log b)^{10}, \quad 4$$

sur la droite (2), qui est ainsi le lieu de ce point lorsque

A varie. On obtient ainsi une nouvelle définition de la première droite de Green.

3. — Observons qu'à la quadrique de Lie

$$z_1 z_4 - z_2 z_3 + 2ab z_4^2,$$

T fait correspondre le plan

$$4z_1 - z_2 (\log b)^{10} - z_3 (\log a)^{01} + [\mathrm{A} + (\log a)^{01} (\log b)^{10} - 8ab]\, z_4 = 0,$$

coupant le plan $z_4 = 0$ suivant la seconde droite de Green.

Liége, le 25 mai 1936.

M. HAYEZ, Imprimeur de l'Académie royale des Sciences, des Lettres et des Beaux-Arts de Belgique.