Une représentation des involutions cycliques du troisième ordre

Lucien Godeaux

Résumé

Étude d'une variété représentant une involution cyclique du troisième ordre dans un espace linéaire obtenue en rapportant projective-ment les hypersurfaces cubiques d'un système linéaire appartenant à l'involution, ne passant pas par les axes ponctuels de l'homographie génératrice, aux hyperplans d'un espace linéaire de dimension convenable. Examen de quelques cas particuliers.

GÉOMÉTRIE ALGÉBRIQUE

Une représentation des involutions cycliques du troisième ordre

par Lucien GODEAUX,
Membre de l'Académie

Résumé. — Étude d'une variété représentant une involution cyclique du troisième ordre dans un espace linéaire obtenue en rapportant projectivement les hypersurfaces cubiques d'un système linéaire appartenant à l'involution, ne passant pas par les axes ponctuels de l'homographie génératrice, aux hyperplans d'un espace linéaire de dimension convenable. Examen de quelques cas particuliers.

Considérons dans un espace linéaire une homographie involutive non homologique et le système linéaire des hyperquadriques transformées en elles-mêmes par l'homographie et ne passant pas par les axes de l'homographie. En rapportant projectivement ces hyperquadriques aux hyperplans d'un espace linéaire à un nombre convenable de dimensions, on obtient une variété image de l'involution engendrée par l'homographie. Cette variété nous a été utile dans la construction de surfaces répondant à certaines conditions. Dans cette note, nous étendons ce procédé aux homographies de période trois, non homologiques, ayant trois axes ponctuels. Nous considérons le système linéaire formé par les hypersurfaces cubiques transformées en elles-mêmes par l'homographie et ne passant pas par les axes de celle-ci. En rapportant projectivement ces hypersurfaces aux hyperplans d'un espace linéaire de dimension convenable, on obtient une variété image de l'involution engendrée par l'homographie.

L'application à quelques cas particuliers nous conduit à construire notamment deux surfaces dont les sections hyperplanes sont les courbes canoniques et deux variétés à trois dimensions possédant une surface canonique d'ordre zéro.

1. Considérons dans un espace linéaire S_r à r dimensions une homographie H de période trois possédant trois axes ponctuels σ_1, σ_2, σ_3 respectivement de dimensions r_1, r_2, r_3. On a donc

$$r = r_1 + r_2 + r_3 + 2.$$

L'homographie H détermine dans S_r une involution cyclique I d'ordre trois.

Nous nous proposons de construire une variété W représentant cette involution, c'est-à-dire une variété dont les points représentent les groupes de l'involution I.

Désignons par x_i ($i = 0, 1, \ldots, r_1$) les coordonnées homogènes des points de l'espace σ_1, par y_i ($i = 0, 1, \ldots, r_2$) celles des points de l'espace σ_2, par z_i ($i = 0, 1, \ldots, r_3$) celles des points de l'espace σ_3. Soient $\varphi_3(x), \varphi'_3(y), \varphi''_4(z)$ des formes cubiques de leurs arguments et $\psi_{111}(x;y;z)$ une forme trilinéaire des x, y, z. L'équation

$$\varphi_3(x) + \varphi'_3(y) + \varphi''_3(z) + \psi_{111}(x,y,z) = 0$$

représente une hypersurface V transformée en soi par H, ne contenant pas les axes de cette homographie. Sous cette condition, nous supposerons le système $|\,V\,|$ complet.

Les nombres des termes de $\varphi_3, \varphi'_3, \varphi''_3$ et de Ψ_{111} sont respectivement

$$R_1 = \binom{r_1 + 3}{3}, R_2 = \binom{r_2 + 3}{3}, R_3 = \binom{r_3 + 3}{3},$$

$$R_4 = (r_1 + 1)(r_2 + 1)(r_3 + 1)$$

de sorte que la dimension du système $|\,V\,|$ est

$$R = R_1 + R_2 + R_3 + R_4 - 1.$$

Pour obtenir la variété W, nous rapporterons projectivement les variétés de $|\,V\,|$ aux hyperplans d'un espace linéaire Σ à R dimensions. Dans ce but, nous poserons

$$\begin{aligned} X_{ijk} &= x_i x_j x_k, & (i,j,k &= 0,1,\ldots,r_1) \\ Y_{ijk} &= y_i y_j y_k, & (i,j,k &= 0,1,\ldots,r_2) \\ Z_{ijk} &= z_i z_j z_k, & (i,j,k &= 0,1,\ldots,r_3) \\ U_{ijk} &= x_i y_j z_k. & (0 \leqslant i \leqslant r_1, 0 &\leqslant j \leqslant r_2, 0 \leqslant k \leqslant r_3) \end{aligned}$$

Les quantités X, Y, Z, U sont les coordonnées projectives des points de Σ.

2. En éliminant les x dans les X, on obtient les équations d'une variété de Veronese généralisée Φ_1, qui représente les hypersurfaces cubiques de l'espace σ_1. La variété Φ_1 est à r_1 dimensions et d'ordre 3^{r_1}. Ses équations s'obtiennent en écrivant que la matrice $| X_{ijk} |$ est de caractéristique un ([1]). Cette variété appartient à un espace Σ_1 à $R_1 - 1$ dimensions.

De même, les équations obtenues en écrivant que la matrice $| Y_{ijk} |$ est de caractéristique un représentant une variété généralisée de Veronese Φ_2 à r_2 dimensions, d'ordre 3^{r_2}; elle appartient à un espace linéaire Σ_2 à $R_2 - 1$ dimensions.

Les équations obtenues en écrivant que la matrice $| Z_{ijk} |$ est de caractéristique un représentant une variété de Veronese Φ_3 à r_3 dimensions, d'ordre 3^{r_3}. Cette variété est plongée dans un espace linéaire Σ_3 à $R_3 - 1$ dimensions.

Appelons Ψ la variété de Segre représentant les ternes de points des espaces $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$. C'est une variété dont les équations s'obtiennent en écrivant que la matrice $| U_{ijk} |$ est de caractéristique un ([2]). Cette variété est à $r - 2$ dimensions et est d'ordre $(r-2)! : r_1! r_2! r_3!$. Elle appartient à un espace linéaire Σ_4 à $R_4 - 1$ dimensions.

Les espaces $\Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_3, \Sigma_4$ appartiennent à l'espace Σ à R dimensions, et deux quelconques de ces espaces ne se rencontrent pas.

Les équations de la variété W s'obtiennent en écrivant que les matrices

$$| X |, \ | Y |, \ | Z |, \ | U |$$

sont de caractéristique un, mais nous allons obtenir d'autres équations représentant cette variété.

La variété W est de dimension r et comme r variétés linéairement indépendantes du système $| V |$ ont en commun 3^r points situés en dehors de $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ et formant 3^{r-1} groupes de l'involution I, la variété W est d'ordre 3^{r-1}.

([1]) On obtient ces équations en exprimant qu'un monome du 6e degré en x peut s'exprimer de deux manières au moins par des monomes du 3e degré.

([2]) Les équations s'obtiennent en exprimant qu'un monome du 2e degré en x, en y et en z s'exprime de deux manières au moins comme produits de monomes du 1er degré en x, en y et en z.

3. Considérons dans σ_1 trois points d'indices i_1, i_2, i_3, dans σ_2 trois points d'indices j_1, j_2, j_3, dans σ_3 trois points d'indices k_1, k_2, k_3. Appelons X, Y, Z les points correspondants sur Φ_1, Φ_2, Φ_3. Nous pouvons grouper les points x, y, z considérés en trois groupes, par exemple i_1, j_1, k_1 ; i_2, j_2, k_2 ; i_3, j_3, k_3 et appeler U_1, U_2, U_3 les points correspondants que la variété Ψ. Nous avons

$$XYZ = U_1U_2U_3, \tag{1}$$

équation qui représente une hypersurface cubique passant par W.

Observons l'on peut choisir $i_1 = i_2 = i_3$, $j_1 = j_2 = j_3$, $k_1 = k_2 = k_3$. L'équation précédente devient

$$XYZ = U_1^3. \tag{2}$$

Le nombre des hypersurfaces du type (1) est égal à $R_1R_2R_3$ et celle du type (2) à R_4.

Si la variété W rencontrait la variété Ψ, toute hypersurface contenant W rencontreraient cette variété. Or la variété (2) ne rencontre pas Ψ, donc *la variété* W *ne rencontre pas* Ψ.

4. Nous allons maintenant déterminer la multiplicité des variétés Φ_1, Φ_2, Φ_3 pour la variété W. Nous supposerons en premier lieu qu'aucun des espaces $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ ne se réduit à un point.

Considérons des points $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$ des espaces $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ et soient $\bar{X}, \bar{Y}, \bar{Z}, \bar{U}$ les points qui leur correspondent sur $\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3, \Psi$. Au plan $\xi = \bar{x}\bar{y}\bar{z}$, nous ferons correspondre l'espace à trois dimensions ξ' déterminé par les points $\bar{X}, \bar{Y}, \bar{Z}, \bar{U}$. Celui-ci rencontre la variété W suivant une surface cubique dont on peut écrire l'équation sous la forme

$$XYZ = U^3.$$

Cette surface possède trois points doubles biplanaires $\bar{X}, \bar{Y}, \bar{Z}$.

Les plans tangents au point $\bar{X}$ sont les plans $\overline{XUY}$, $\overline{XUZ}$.

Laissons fixe le point $\bar{X}$ et faisons varier $\bar{Y}$ et $\bar{Z}$. Pour déterminer la multiplicité de $\bar{X}$ pour W, considérons le lieu ρ_{12} de la droite $\overline{UY}$ et le lieu ρ_{13} de la droite $\overline{UZ}$.

Au point $\bar{X}$ correspond sur Ψ une variété de Segre Ψ_1 représentant les couples de points des espaces σ_2 et σ_3. Cette variété a la dimension $r_2 + r_3$ et l'ordre $n_1 = (r_2 + r_3)! : r_2!r_3!$. A un point y de σ_2 correspond dans Ψ_1 un espace linéaire η à r_3 dimensions et sur Φ_2 un point Y. Lorsque z varie, le point U décrit l'espace η et la droite UY décrit l'espace à $r_3 + 1$ dimensions $Y\eta$. La variété ρ_{12} est donc le lieu d'espaces à $r_3 + 1$ dimensions et est donc de dimension $r_2 + r_3 + 1$.

La variété Ψ_1 est située dans un espace à $(r_2 + 1)(r_3 + 1) - 1$ dimensions et la variété ρ_{12} est située dans un espace linéaire E contenant l'espace précédent et l'espace Σ_2. Considérons un hyperplan E′ de E passant par l'espace de Ψ_1. S'il existe un point de ρ_{12} n'appartenant pas ni à Φ_2, ni à Ψ_1 situé dans cet espace, il appartient à une droite UY rencontrant Ψ_1 et par conséquent située dans E′. Il en résulte que E′ rencontre ρ_{12} suivant des espaces $Y\eta$, formant une variété à $r_2 - 1 + r_3 + 1 = r_2 + r_3$ dimensions, car E′ rencontre Σ_2 suivant un hyperplan de cet espace. Mais l'espace E′ contient également Ψ_1, qui est simple pour ρ_{12} puisque par un point de Ψ_1 passe une seule droite UY. On en conclut que la variété ρ_{12} est d'ordre $3^{r^2} + n'_1$.

De même, lorsque y, z varient, le lieu de la droite UZ est une variété ρ_{13} à $r_2 + r_3 + 1$ dimensions d'ordre $3^{r_3} + n_1$.

Le cône tangent au point $\overline{X}$ à la variété W se compose de deux cônes ayant pour sommet commun l'espace de Σ_1 tangent en $\overline{X}$ à Φ_1 et contenant l'un la variété ρ_{12}, l'autre la variété ρ_{13}. Ces deux cônes ont la même dimension r que la variété W. Ils ont en outre en commun le cône projetant Ψ_1 de $\overline{X}$.

Un point de la variété Φ_1 a la multiplicité $3^{r_2} + 3^{r_3} + 2n_1$ pour la variété W. Il en est de même pour la variété Φ_1.

Observons que ce raisonnement subsiste si l'espace ρ_1 se réduit à un point, c'est-à-dire si le point $\overline{X}$ est fixe.

Lorsque les espaces σ_3, σ_1 ne se réduisent pas à des points, si l'on désigne par n_2 l'ordre de la variété de Segre représentant les couples de points de σ_3 et de σ_1, un point Y de Φ_2 est multiple d'ordre $3^{r_3} + 3^{r_1} + 2n_2$ pour la variété W. Si les espaces σ_1, σ_2 ne se réduisent pas à des points et si n_3 désigne l'ordre de la variété de Segre représentant les couples de points de ces deux espaces, un point Z de Φ_3 est multiple d'ordre $3^{r_1} + 3^{r_2} + 2n_3$.

5. Supposons que seul l'espace σ_2 se réduise à un point. On a $r_2 = 0$ et $r = r_1 + r_3 + 2$. L'espace Σ_2 et la variété Φ_2 se réduisent à un point. La variété Ψ_1 se réduit actuellement à un espace à r_3 dimensions. Quant à la variété ρ_{12}, elle est l'espace linéaire à $r_3 + 1$ dimensions déterminé par le point Y et l'espace Ψ_1.

Entre l'espace σ_3 et l'espace Ψ_1, nous avons une homographie et la variété est le lieu des droites joignant deux points de Φ_3 et Ψ homologues dans une correspondance biunivoque. La variété ρ_{13} appartient à un espace linéaire E contenant les espaces Σ_3 et Ψ_1, elle a $r_3 + 1$ dimensions. Un hyperplan E′ de E passant par Ψ_1 coupe Φ_3 suivant une variété à $r_3 - 1$ dimensions et d'ordre 3^{r_3}. Il y a donc $\infty^{r_3 - 1}$ droites UZ appartenant à E′ et elles engendrent une variété d'ordre 3^{r_3}. Comme Ψ_1 appartient simplement à la variété ρ_{13}, celle-ci est d'ordre $3^{r_3} + 1$.

Le cône tangent au point $\overline{\mathrm{X}}$ à la variété W se scinde en un hyperplan contenant l'espace tangent en $\overline{\mathrm{X}}$ à Φ_1 dans Σ_1 et l'espace ρ_{12}, et en un cône à $r + 2$ dimensions projetant de cet espace tangent la variété ρ_{13}. *Le point* $\overline{\mathrm{X}}$ *est multiple d'ordre* $3^{r_3} + 2$ *pour la variété* W et il en est de même de la variété Φ_1.

Le raisonnement précédent est encore applicable si l'espace σ_1 se réduit à un point.

Supposons maintenant que σ_2 et σ_3 se réduisent tous deux à des points. On a $r_2 = r_3 = 0$ et $r = r_1 + 2$. La variété Ψ_1 se réduit à un point et les droites UY, UZ sont fixes.

Le point $\overline{\mathrm{X}}$ *est double bispatial pour la variété* W, le cône tangent en ce point étant formé des espaces à r dimensions qui projettent les droites UY, UZ de l'espace tangent à Φ_1 en $\overline{\mathrm{X}}$ dans Σ_1. Il en est de même de la variété Φ_1.

6. Dans l'espace S_r, les hyperplans passant par σ_2 et σ_3 sont unis pour H. Chacun d'eux rencontre l'espace σ_1 en un espace σ_1' à $r_1 - 1$ dimensions.

Aux groupes de l'involution I situés dans un tel hyperplan correspondent sur W les points d'une variété W′ à $r - 1$ dimensions analogue à W et dont on peut déterminer les propriétés en répétant les raisonnements faits ci-dessus. On voit que W′ passe par les variétés Φ_2 et Φ_3, mais rencontre Φ_1 suivant une variété de Veronese représentant les hypersurfaces cubiques de l'espace σ_1.

L'équation de l'hyperplan est

$$\Sigma\lambda_i x_i = 0, \qquad (i = 0, 1, \ldots, r_1)$$

En multipliant par $x_j x_k$, on obtient l'équation d'un hyperplan

$$\Sigma\lambda_i \mathrm{X}_{ijk} = 0$$

passant par les espaces $\Sigma_2, \Sigma_3, \Sigma_4$ et par W′.

En multipliant les deux membres de l'équation par $y_j z_k$, on obtient l'équation d'un hyperplan

$$\Sigma \lambda_i \mathrm{U}_{ijk} = 0$$

passant par Σ_1, Σ_2, Σ_3 et par W'.

7. Nous allons maintenant considérer certains cas particuliers en supposant $r \leqslant 5$. Nous avons déjà considéré le cas $r = 2$, au début de nos recherches sur les involutions cycliques ([1]). Il s'agit alors de la représentation d'une involution cyclique plane par une surface cubique ayant trois points doubles biplanaires dont l'équation s'écrit

$$\mathrm{X}_0\mathrm{Y}_0\mathrm{Z}_0 = \mathrm{U}_{000}^3$$

que nous avons déjà utilisée plus haut. Nous ne nous y arrêterons pas et passerons directement au cas $r = 3$, où σ_1 et σ_2 sont des points, σ_3 une droite.

Nous modifierons quelque peu nos notations dans un but de simplicité, en posant

$$\mathrm{X}_0 : \mathrm{Y}_0 : \mathrm{Z}_0 : \mathrm{Z}_1 : \mathrm{Z}_2 : \mathrm{Z}_3 : \mathrm{U}_0 : \mathrm{U}_1 =$$
$$x_0^3 : y_0^3 : z_0^3 : z_0^2 z_1 : z_0 z_1^2 : z_0^3 : x_0 y_0 z_0 : x_0 y_0 z_1 .$$

Dans l'espace Σ, qui a sept dimensions, l'espace Σ_1 et la variété Φ_1 d'une part, l'espace Σ_2 et la variété Φ_2 d'autre part, se réduisent à des points. L'espace Σ_3 a trois dimensions et la variété Φ_3 est une cubique gauche d'équations

$$\left\| \begin{matrix} \mathrm{Z}_0 & \mathrm{Z}_1 & \mathrm{Z}_2 \\ \mathrm{Z}_1 & \mathrm{Z}_2 & \mathrm{Z}_3 \end{matrix} \right\| = 0.$$

Enfin la variété Ψ est la droite $\mathrm{U}_0\mathrm{U}_1$ et l'espace Σ_4 est une droite.

Considérons un plan ξ passant par les points x, y et coupant σ_3 en un point $\bar{z}$. A ce plan correspond un espace ξ' à trois dimensions déterminé par les points X, Y, un point $\overline{\mathrm{Z}}$ de la cubique gauche Φ_3 et un point $\overline{\mathrm{U}}$ de la droite Ψ.

L'espace ξ' coupe W suivant une surface cubique G ayant des

([1]) Voir notre note *Étude élémentaire sur l'homographie plane du troisième ordre et sur une surface cubique* (Nouvelles Annales de Mathématiques, 1916, pp. 49-61). Travail écrit au front pendant la guerre 1914-18.

points doubles biplanaires en X, Y, $\overline{\mathrm{Z}}$. Lorsque $\bar{z}$ varie sur la droite σ_3, la surface G engendre la variété W. Celle-ci est d'ordre 9 et a trois dimensions.

Les plans tangents à la surface G en X sont les plans $\mathrm{XY\overline{U}}$ et $\mathrm{X\overline{Z}\overline{U}}$. Lorsque z varie, la droite $\mathrm{Y\overline{U}}$ décrit les plans déterminés par le point Y et cette droite et si nous projetons ce plan de X, nous obtenons un espace à trois dimensions tangent à W en X.

A un point z de σ_3 correspondent un point Z de Φ_3 et un point U de la droite Ψ, de sorte que quand z varie, la droite ZU décrit une réglée ρ lieu des droites joignant des points d'une droite et d'une cubique gauche homologues dans une correspondance biunivoque. Cette réglée appartient à l'espace linéaire déterminé par l'espace Σ_3 et la droite Ψ. Un espace à quatre dimensions passant par la droite Ψ contient trois génératrices de la réglée et la droite Ψ, elle est donc d'ordre quatre.

Le cône tangent projetant la réglée ρ de X est une variété à trois dimensions tangente à W en X. Ce point est donc multiple d'ordre cinq pour la variété W.

De même, le cône tangent à W en Y est formé de l'hyperplan déterminé par les points X, Y, U_0, U_1 et du cône projetant la réglée ρ de Y.

Le cône tangent à W en un point $\overline{\mathrm{Z}}$ est formé des hyperplans déterminés par le point $\overline{\mathrm{Z}}$ et les plans $\mathrm{XU_0U_1}$ et $\mathrm{YU_0U_1}$. C'est donc un point double bispatial pour la variété W.

La variété W appartient aux hypersurfaces

$$\mathrm{X_0Y_0Z_0} = \mathrm{U_0^3}, \mathrm{X_0Y_0Z_1} = \mathrm{U_0^2U_1}, \mathrm{X_0Y_0Z_2} = \mathrm{U_0U_1^2}, \mathrm{X_0Y_0Z_3} = \mathrm{U_1^3}.$$

La variété W contient la droite XY.

Les sections de W par des espaces linéaires à cinq dimensions sont des courbes de genre quatre, car deux surfaces cubiques V de S_3 ont en commun une courbe de genre 10 ne passant par aucun point uni de H.

8. Supposons maintenant que $r = 4$ et que σ_1 soit un point, σ_2 et σ_3 des droites.

Dans l'espace Σ, qui a 12 dimensions, Σ_1 et Φ_1 se réduisent à un point X, Σ_2 et Σ_3 sont des espaces à trois dimensions contenant respectivement des cubiques gauches Φ_2 et Φ_3, Ψ est une quadrique appartenant à un espace Σ_4 à trois dimensions.

La variété W est à quatre dimensions et d'ordre 27.

Considérons un plan ξ passant par le point X, par des points $\bar{y}$ et $\bar{z}$ des droites σ_2, σ_3 et soient $X, \overline{Y}, \overline{Z}$ et $\overline{U}$ les points qui leur correspondent dans Σ. L'espace ξ' à trois dimensions déterminé par ces points coupe W suivant une surface cubique G ayant des points doubles biplanaires en $X, \overline{Y}, \overline{Z}$.

Les plans tangents à G en X sont $X\overline{Y}\overline{U}$ et $X\overline{Z}\overline{U}$. Lorsque y et z varient, quels sont les lieux des droites $\overline{Y}\overline{U}$ et $\overline{Z}\overline{U}$.

La quadrique Ψ représente actuellement les couples de points des droites σ_2 et σ_3 (c'est la variété que nous avons désignés par Ψ_1 plus haut). A un point y, correspond sur Ψ une droite η_y et un point Y de Φ_2. Le lieu des droites $\overline{Y}\overline{U}$ est une variété à trois dimensions ρ_2 lieu des plans $Y\eta_y$. Elle est située dans l'espace à 7 dimensions déterminé par Σ_2 et Σ_4. Un espace E_6 à six dimensions passant par la quadrique Ψ rencontre Φ_2 en trois points et il existe donc trois plans de ρ_2 situés dans E_6. Comme la quadrique Φ appartient à ρ_2, on en conclut que la variété ρ_2 est d'ordre cinq.

De même, le lieu de la droite $\overline{Z}\overline{U}$ est une variété à trois dimensions ρ_3 d'ordre cinq et le cône tangent en X à W se compose des cônes projetant de ce point les variétés ρ_2 et ρ_3. Le point X est donc multiple d'ordre 10 pour la variété W.

Les plans tangents à la surface G en Y sont les plans $\overline{Y}X\overline{U}$ et $\overline{Y}\overline{Z}\overline{U}$. Déterminons le lieu de la droite $X\overline{U}$ lorsque z varie. Le point Y étant fixe, il lui correspond une droite η_y de la quadrique Ψ. L'hyperplan $\overline{Y}X\eta_y$ est tangent à W en $\overline{Y}$. Lorsque z varie, la droite $\overline{Z}\overline{U}$ engendre la variété à trois dimensions ρ_3 et le cône projetant de $\overline{Y}$ cette variété est tangent à W en $\overline{Y}$. Le point $\overline{Y}$ est donc multiple d'ordre six pour W. Il en est de même de la cubique gauche Φ_2.

On trouve de même que le cône tangent en un point $\overline{Z}$ est formé de l'espace déterminé par les points X, Z et la droite η_z qui correspond à z sur la quadrique Ψ, et du cône projetant la variété ρ_2. Le point $\overline{Z}$ est donc multiple d'ordre six pour la variété W et il en est de même de la cubique gauche Φ_3.

9. L'intersection F de deux variétés V dans S_4 est une surface ne passant par aucun point uni de H et dont les sections hyperplanes constituent le système canonique. L'involution déterminée par H sur F a pour image la section F′ de W par un espace à 10 dimensions. Comme F, elle est régulière.

Les genres de F sont $p_a = p_g = 5$ et le genre p'_a de F′ est déterminé par la formule

$$p_a + 1 = 3(p'_a + 1),$$

d'ou $p'_a = p'_g = 1$.

Dans le système $|\,L\,|$ des sections hyperplanes de F, il y a trois systèmes de courbes transformées en elles-mêmes par H. Celui de ces systèmes qui correspond au système canonique de F′ ne peut avoir que la dimension un. C'est donc le système formé par la courbe unique découpée par l'hyperplan passant par les droites σ_2 et σ_3. Cette courbe L′ a le genre quatre, la courbe homologue sur F ayant le genre 10. Il en résulte que le genre linéaire de F′ est égal à quatre.

10. Supposons encore $r = 4$ mais que σ_1 et σ_2 se réduisent à des points et que σ_3 soit un plan.

Dans Σ, qui est à 15 dimensions, Σ_1 et Φ_1 se réduisent à un point X, Σ_2 et Φ_2 à un point Y et dans Σ_3, qui a 9 dimensions, la variété Φ_3 a pour équations

$$\left\| \begin{matrix} Z_{300} & Z_{120} & Z_{102} & Z_{111} & Z_{201} & Z_{210} \\ Z_{210} & Z_{030} & Z_{012} & Z_{021} & Z_{111} & Z_{120} \\ Z_{201} & Z_{021} & Z_{003} & Z_{012} & Z_{102} & Z_{111} \end{matrix} \right\| 30$$

C'est une surface du neuvième ordre.

Quant à la variété Ψ, elle se réduit à un plan.

Considérons un plan ξ passant par les points $\sigma_1, \sigma_2, \bar{z}$ de σ_3 et l'espace ξ' qui lui correspond dans Σ et qui est déterminé par les points X, Y, $\bar{Z}$ et $\bar{U}$.

L'espace ξ' coupe la variété W suivant une surface G ayant des points doubles biplanaires en X, Y et $\bar{Z}$, mais ne passant pas par $\bar{U}$.

Le plan tangent à cette surface en X sont les plans $X\bar{U}Y$ et $X\bar{U}\bar{Z}$. Lorsque $\bar{Z}$ et par suite $\bar{U}$ varient, le premier plan décrit l'espace à quatre dimensions $XY\Psi$. La droite $\bar{Z}\bar{U}$ engendre une variété ρ, le second cône touchant la variété projetant ρ du point X.

Les plans σ_3 et Ψ sont homographiques comme on le voit en considérant les équations

$$\frac{U_{000}}{x_0 y_0 z_0} = \frac{U_{001}}{x_0 y_0 z_1} = \frac{U_{002}}{x_0 y_0 z_2}$$

de sorte que l'on peut dire que la surface Φ_3 représente le système des courbes de troisième ordre du plan Ψ. L'espace Σ_3 et le plan Ψ appartiennent à un espace à 12 dimensions E_{12}. Considérons un hyperplan E_{11} passant par Ψ de cet espace. Il coupe Φ_3 suivant une courbe α d'ordre 9 et à cette courbe correspond une cubique α' de Ψ. Il existe dans Σ_3 des hyperplans coupant Φ_3 suivant trois cubiques gauches. Supposons que E_{11} passe par un tel hyperplan. La cubique correspondante dans Ψ dégénère en trois droites et E_{11} coupe ρ suivant trois surfaces du troisième ordre, auxquelles il faut ajouter le plan Ψ. La variété ρ est donc d'ordre 10.

Le cône tangent à W au point X se compose donc de l'espace $X\overline{X}\Psi$ à quatre dimensions et de la projection de la variété ρ à partir de X.

De même, le cône tangent à W au point Y se compose de l'espace $XY\Psi$ et du cône projetant de Y la variété ρ. Les points X et Y sont donc multiples d'ordre onze pour la variété W.

Reprenons la surface G. Les plans tangents à cette surface au point $\overline{Z}$ sont $\overline{Z}\overline{U}x$ et $\overline{Z}\overline{U}Y$. Les espaces tangents à W en Z sont donc les espaces à quatre dimensions projetant du plan tangent à Φ_3 dans Σ_3 au point $\overline{Z}$ les droites $X\overline{U}$ et $Y\overline{U}$. Le point Z est donc double bispatial pour W et la variété Φ_3 est double pour W.

11. Considérons dans S_4 deux hypersurfaces V. Elles ont en commun une surface F du neuvième ordre qui ne passe pas par les points σ_1, σ_2 mais rencontre en 9 points le plan σ_3. Sur F, H engendre donc une involution cyclique d'ordre trois possédant neuf points unis, qui sont de seconde espèce, les tangentes en un de ces points $\bar{z}$ passant par σ_1 et par σ_2. Soit F' la surface section de W qui représente cette involution. Elle est précisément la section de W par un espace à 12 dimensions.

Le système canonique de la surface F coïncide avec celui des sections hyperplanes et cette surface a donc le genre arithmétique $p_a = 5$.

Entre le genre aithmétique p_a de F et celui p_a' de F' nous avons la relation

$$12(p_a + 1) = 3.12(p_a' + 1) - 9.8,$$

d'où $p_a' = 3$.

Dans le système canonique dc F, il y a trois systèmes linéaires appar tenant à l'involution I. Deux sont formés des courbes isolées découpées par les hyperplans passant par σ_3, l'un par σ_1 et l'autre par σ_2. Le troisième est formé des courbes découpées par les hyperplans passant par les points σ_1, σ_2 et forment un réseau. Aux courbes canoniques de F' correspondent des courbes canoniques de F et celles-ci forment nécessairement le réseau précédent.

A la section de F par un hyperplan passant par σ_1, σ_2 correspond sur F' une courbe de genre quatre et le genre linéaire de F' est donc quatre.

La surface F et par suite la surface F' sont régulières et on a $p'_a = p'_g = 3$.

Les sections de la variété W *par des espaces linéaires à 12 dimensions sont des surfaces de genres arithmétique et géométrique trois et de genre linéaire quatre.*

La surface F' doit posséder 9 points de diramation qui sont doubles biplanaires. Ce sont les points de rencontre de Φ_3 avec l'espace à 12 dimensions de F'.

12. Considérons maintenant $r = 5$ et supposons que les axes σ_1, σ_2, σ_3 de H soient des droites.

Les espaces Σ_1, Σ_2, Σ_3 sont à trois dimensions et l'espace Σ_4 à 7 dimensions. Les variétés Φ_1, Φ_2, Φ_3 sont des cubiques gauches et la variété Ψ est du sixième ordre. L'espace Σ a 19 dimensions et la variété W est d'ordre 3^4 et de dimensions cinq.

Reprenons le plan ξ déterminé par trois points $\bar{x}$, $\bar{y}$, $\bar{z}$ et l'espace à trois dimensions ξ' passant par les points $\overline{\mathrm{X}}, \overline{\mathrm{Y}}, \overline{\mathrm{Z}}, \overline{\mathrm{U}}$. Les plans tangents en $\overline{\mathrm{X}}$ à la surface G section de W par ξ' sont les plans $\overline{\mathrm{XUY}}$ et $\overline{\mathrm{XUZ}}$. Laissons $\bar{x}$ fixe et faisons varier $\bar{y}$ et $\bar{z}$.

Les groupes de Ψ qui correspondent au point fixe $\bar{x}$ forment la variété de Segre Ψ_1 représentant les couples de points des droites σ_2, σ_3. Lorsque $\bar{y}$ est fixe, il correspond à ce point une droite η_y de Ψ_1 et un point de Φ_2. Lorsque z varie, la droite YU décrit le plan $\mathrm{Y}\eta_y$. Le lieu de la droite $\overline{\mathrm{YU}}$ lorsque y et z varient est donc une variété ρ_{12} lieu des plans $\mathrm{Y}\eta_y$. Cette variété est située dans l'espace E_7 contenant Σ_2 et Ψ_1. Un hyperplan E_6 de cet espace contenant Ψ_1 coupe Φ_2 suivant trois points. Cet hyperplan contient donc trois plans $\mathrm{Y}\eta_y$ et de plus, la variété Ψ_1. Il coupe donc ρ_{12} suivant une variété à deux dimensions d'ordre cinq, car Ψ_1 appartient à cette variété et est une quadrique.

Le lieu de la droite $\overline{\mathrm{Z}}\overline{\mathrm{U}}$ est de même une variété ρ_{13} à trois dimensions d'ordre cinq et le cône tangent en $\overline{\mathrm{X}}$ à la variété W projette de la tangente à Ψ_1 en ce point les variétés ρ_{12} et ρ_{13}. Le point $\overline{\mathrm{X}}$ est donc multiple d'ordre 10 pour la variété W. Il en est de même de la cubique gauche Φ_1.

Les mêmes raisonnements conduiront à des résultats analogues pour les points des cubiques gauches Φ_2 et Φ_3.

13. Considérons dans S_5 trois hypersurfaces V, elles ont en commun une surface F d'ordre 27 ne passant en général par aucun point uni de H. Sur F, nous avons donc une involution cyclique d'ordre trois privées de points unis.

Les courbes canoniques de F sont découpées par les hypersurfaces cubiques et par conséquent, le genre arithmétique de F est $p_a = 53$.

Le genre linéaire de F est $p = 3^5 + 1$.

L'involution déterminée sur F par l'homographie H a pour image une surface F′ section de la variété W par un espace à 16 dimensions. Son genre arithmétique p'_a est donné par la formule

$$p_a + 1 = 3(p'_a + 1),$$

d'où $p'_a = 17$.

Désignons par $| \mathrm{L} |$ le système canonique de F. Ce système contient trois systèmes linéaires appartenant à l'involution I. Le premier est le système $| \mathrm{L}_0 |$, de dimension 16, découpé par les hypersurfaces V ne passant pas par F.

Représentons par $\alpha_{12}(u;v)$, $\beta_{12}(u;v)$, $\gamma_{12}(u;v)$ des formes linéaires par rapport aux u et quadratiques par rapport aux v. Cela étant, les deux systèmes de courbes canoniques de F appartenant à I sont découpés par les hypersurfaces d'équations

$$\alpha_{12}(x;z) + \beta_{12}(y;x) + \gamma_{12}(z;y) = 0,$$

$$\alpha'_{12}(x;y) + \beta'_{12}(y;z) + \gamma'_{12}(z;x) = 0.$$

et ont tous deux la dimension 17. Au système canonique de F′, qui a la dimension 16, correspond celui des systèmes précédents qui a la même dimension, c'est-à-dire le système $| \mathrm{L}_0 |$. On en conclut que le système canonique de F′ est celui de ses sections hyperplanes.

Les surface F et F′ sont régulières et d'autre part la surface F′ étant d'ordre 81, son genre linéaire est égal à 82.

Les sections de W *par les espaces à 16 dimensions sont des surfaces de genres $p'_a = p'_a = 17$, de genre linéaire 82 et dont les courbes canoniques sont découpées par les hyperplans.*

Soit W′ la section de W par un espace à 17 dimensions. C'est une variété à trois dimensions et si nous désignons par | K | le système de ses sections hyperplanes, l'adjoint | K′ | à ce système est précisément | K | d'après le théorème précédent. Il en résulte que W′ a une surface canonique d'ordre zéro.

Les sections de W *par des espaces à 17 dimensions sont des variétés dont la surface canonique a l'ordre zéro.*

14. Supposons encore $r = 5$ mais que les espaces σ_1, σ_2 se réduisent à des points, l'espace σ_3 ayant trois dimensions. Les espaces Σ_1 et Σ_2 se réduisent à des points X, Y, l'espace Σ_3 a 19 dimensions et l'espace Σ_4 est à trois dimensions. L'espace Σ a 25 dimensions. La variété Φ_3 a l'ordre 27 et la variété Ψ se réduit à l'espace Σ_4.

Les espaces σ_3 et Ψ sont homographiques et on peut donc dire que la variété Φ_3 représente les surfaces cubiques de l'espace Σ_4. Il y a de plus une correspondance biunivoque entre les points de Φ_3 et ceux de Ψ. Nous désignerons par ρ la variété à quatre dimensions lieu des droites ZU.

Le raisonnement pour déterminer l'ordre de ρ est analogue à celui qui a été fait plus haut. La variété ρ appartient à l'espace E_{23} à 23 dimensions déterminé par Σ_3 et l'espace Ψ. Un hyperplan E_{22} passant par Ψ de cet espace rencontre Φ_3 suivant une surface d'ordre 27 à laquelle correspond dans Ψ une surface cubique. On peut choisir l'espace E_{22} de telle sorte qu'il coupe Φ_3 suivant trois surfaces du neuvième ordre, la surface cubique correspondant dans Ψ dégénérant en trois plans. Il en résulte que E_{22} coupe la variété ρ suivant trois variétés à trois dimensions, d'ordre neuf, auxquelles il faut adjoindre l'espace Ψ_4. La variété ρ est donc d'ordre 82.

Cela étant, le cône tangent en X à la variété W se compose de l'espace XYΨ et du cône projetant de X la variété ρ. Ce point est donc multiple d'ordre 83 pour la variété W.

On prouverait de même que le point Y est multiple d'ordre 83 pour W.

Quant au point $\overline{\mathrm{Z}}$ de Φ_3, il est double bispatial pour W, les espaces tangents en ce point projetant de l'espace tangent à Φ_3 dans Σ_3 la droite X$\overline{\mathrm{U}}$ et la droite Y$\overline{\mathrm{U}}$, le point $\overline{\mathrm{U}}$ correspondant au point $\overline{\mathrm{Z}}$.

15. Considérons la surface F intersection de trois variétés V. H. détermine sur F une involution ayant 27 points unis, de seconde espèce, dans l'espace σ_3.

Soit F′ la surface image de l'involution appartenant à F. C'est la section de W par un espace à 22 dimensions.

Entre les genres arithmétiques $p_a = 53$ de F et celui p'_a de F′ nous avons la relation

$$12(p_a + 1) = 3.12\,(p'_a + 1) - 27.8.$$

d'où $p'_a = 23$.

Aux courbes canoniques de la surface F′ correspondent sur F des courbes canoniques transformées en elles-même par H. Elles doivent former un système de dimension 16 et ce sont donc les courbes découpées sur F par les variétés V ne contenant pas la surface. On en conclut que le système canonique de F′ coïncide avec celui de ses sections hyperplanes.

La surface F′ contient 27 points doubles biplanaires qui sont les intersections de l'hyperplan qui la contient avec la variété Φ_3. De plus, la surface F′ est comme la surface F régulière.

Les sections de la variété W *par des espaces à 22 dimensions sont des surfaces de genres* $p'_a = p'_g = 23$ *et de genre linéaire 82, possédant 27 points doubles biplanaires, dont les courbes canoniques sont les sections hyperplanes.*

La variété W′, section de W par un espace à 21 dimensions, possède une surface canonique d'ordre zéro et une courbe d'ordre 27 dont les points sont doubles bispaciaux pour la variété.

16. Supposons toujours $r = 5$, l'espace σ_1 se réduisant à un point, l'espace σ_2 étant une droite et l'espace σ_3 un plan. L'espace Σ_1 se réduit à un point X, l'espace Σ_2 a trois dimensions et l'espace Σ_3 9 dimensions. L'espace Σ_4 a cinq dimensions et représente les couples de points de σ_2 et de σ_3. La variété Φ_2 est une cubique gauche et la variété Φ_3 est une surface du neuvième ordre. La variété Ψ est d'ordre trois. L'espace Σ est à 20 dimensions.

A un point y de σ_2 correspond dans Ψ un plan η_y et à un point z de σ_3 correspond une droite η_z. Les plans σ_3 et η_y sont homographiques de même que les droites-σ_2 et η_z.

Le lieu de la droite YU est une variété ρ_{12} lieu des espaces à trois dimensions déterminés par un point Y et son plan homologue. Cette variété appartient à l'espace E_9 à 9 dimensions, déterminé par Σ_2 et Σ_4. Un hyperplan E_8 de cet espace, passant par Ψ, coupe la cubique Φ_2 en trois points et par conséquent E_8 rencontre ρ_{12} suivant trois espaces $Y\eta_y$ auxquels il faut adjoindre Ψ. La variété ρ_{12} est donc d'ordre six.

La droite ZU engendre une variété ρ_{13} lieu des plans $Z\eta_z$. Cette variété appartient à l'espace E_{15} déterminé par Σ_3 et Σ_4. Un hyperplan E_{14} passant par Ψ de cet espace coupe Φ_3 suivant une courbe d'ordre 9. L'espace E_{14} rencontre donc ρ_{13} suivant ∞^1 plans $Z\eta_z$ formant une variété d'ordre 9 et suivant la variété Ψ, donc la variété ρ_{13} est d'ordre 12.

Le cône tangent à W au point X se compose des projections des variétés ρ_{12} et ρ_{13}. Ce point est donc multiple d'ordre 18 pour la variété W.

Supposons que le point Y soit fixe. La droite XU engendre l'espace à trois dimensions ρ_{21} projetant η_y de Y.

La droite ZU engendre une variété ρ_{23} lieu des espaces déterminés par le point Z et le plan η_y correspondant à Y. La surface Φ_3 et le plan η_y sont en correspondance biunivoque et la variété ρ_{23} est d'ordre 10, c'est une variété à trois dimensions.

Le cône tangent en un point Y à W est formé des cônes projetant de la tangente à Φ_3 en Y les variétés ρ_{31} et ρ_{33}. Le point Y est donc multiple d'ordre 11.

Supposons maintenant que le point Z soit fixe. Le lieu de la droite XU est le plan ρ_{31} projetant de X la droite η_2 homologue de Z.

Le lieu de la droite YU est l'ensemble des droites joignant le point Y à la droite η_z homologue du point Z. Ce lieu est donc une surface ρ_{32} d'ordre 4.

Le cône tangent au point Z est la projection à partir du plan tangent à Z dans Σ_3 des surfaces ρ_{31} et ρ_{32}. Le point Z est donc multiple d'ordre 5 pour W.

17. Considérons de nouveau la surface F intersection de trois variétés V. Cette surface ne rencontre en général aucun point uni de H et cette homographie engendre donc sur F une involution privée de points unis. Comme elle est de genre arithmétique $p_a = 53$, le genre arithmétique p'_a de la surface F' image de l'involution est $p'_a = 17$.

Comme F′ est la section de W par un espace à 17 dimensions, les courbes canoniques de cette surface ne peuvent être les sections hyperplanes.

Aux courbes canoniques de F′ ne peuvent donc correspondre sur F les sections de cette surface par les variétés V qui ne la contiennent pas.

Les hypersurfaces

$$\alpha_{12}(x;y) + \beta_{12}(y;z) + \gamma_{12}(z;x) = 0,$$

$$\alpha'_{12}(x;z) + \beta'_{12}(y;x) + \gamma'_{12}(z;y) = 0.$$

découpent sur F des systèmes de courbes canoniques transformées en elles-mêmes par H. Le premier a la dimension 17 et le second la dimension 16, comme le système canonique. C'est donc ce système qui est le transformé du système canonique de F′.

Nous nous bornerons à indiquer comment on obtient dans W les équations des courbes canoniques de F′. En élevant au cube les deux membres de la dernière des équations précédentes, on obtient une équation dont tous les termes s'expriment en fonction des X, Y, Z.

Ajoutons que la section de W par une espace à 18 dimensions est une variété possédant une surface canonique d'ordre zéro.

Liège, le 21 mars 1972.